

# Baccalauréat général blanc

Épreuve du jeudi 27 février

Enseignement de spécialité

**MATHÉMATIQUES**

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices ainsi que tout matériel de construction (règle, équerre, compas) sont les seuls outils autorisés.

Les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique ne peuvent être utilisées qu'en « mode examen ».

Vous vérifierez que votre sujet comporte bien 6 pages numérotées.

## Exercice 1 (6 points)

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment*

### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$$

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x}$$

- (b) En déduire le sens de variation et le minimum de la fonction  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (c) Justifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) > 0$ .
- (d) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (e) Donner une valeur arrondie de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

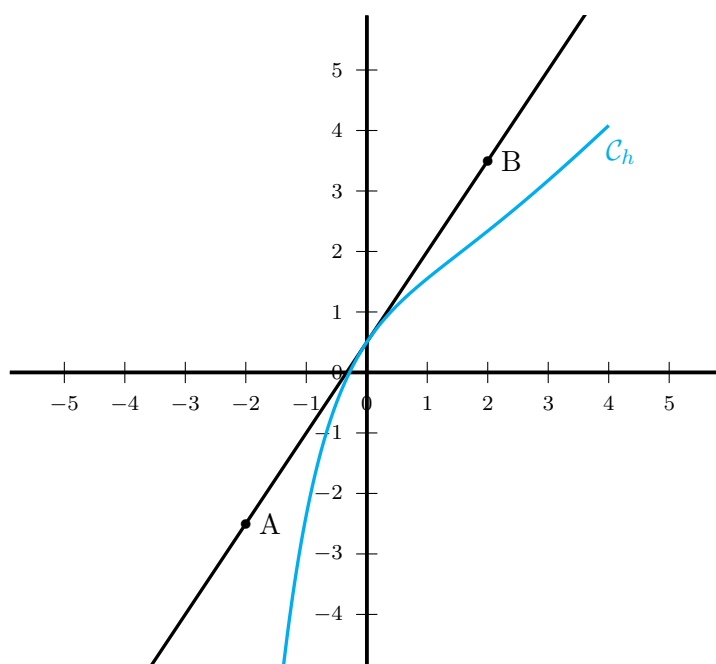
### Partie B

On considère une fonction  $h$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)e^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent:

- la courbe représentative  $\mathcal{C}_h$  de la fonction  $h$  ;
- les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(-2 ; -2,5)$  et  $(2 ; 3,5)$ .



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction  $h$ .
2. Sachant que la fonction  $h$  admet sur  $\mathbb{R}$  une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x}$$

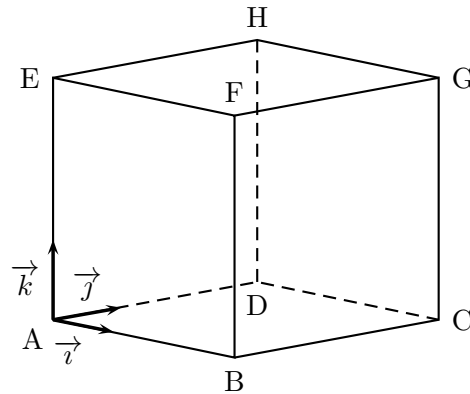
valider ou non la conjecture précédente.

3. Déterminer une équation de la droite  $(AB)$ .
4. Sachant que la droite  $(AB)$  est tangente à la courbe représentative de la fonction  $h$  au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de  $a$  et  $b$ .

## Exercice 2 (5 points)

Le solide  $ABCDEFGH$  est un cube. On se place dans le repère orthonormé  $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace dans lequel les coordonnées des points  $B$ ,  $D$  et  $E$  sont :

$$B(3 ; 0 ; 0), \quad D(0 ; 3 ; 0) \quad \text{et} \quad E(0 ; 0 ; 3)$$



On considère les points  $P(0 ; 0 ; 1)$ ,  $Q(0 ; 2 ; 3)$  et  $R(1 ; 0 ; 3)$ .

1. Placer les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sur la figure en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
2. Justifier que les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  définissent un plan.
3. On s'intéresse à présent à la distance entre le point  $E$  et le plan  $(PQR)$ .

Soit  $L$  le point de coordonnées  $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$ .

- (a) Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{LE}$  est normal au plan  $(PQR)$ .
  - (b) Montrer que  $L$  appartient au plan  $(PQR)$ .
  - (c) Déterminer la distance entre le point  $E$  et le plan  $(PQR)$ .
4. En choisissant le triangle  $EQR$  comme base, montrer que le volume du tétraèdre  $EPQR$  est  $\frac{2}{3}$ .

On rappelle que le volume  $V$  d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante}$$

5. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle  $PQR$ .

### Exercice 3 (4 points)

*Les parties  $A$  et  $B$  sont indépendantes.  
Les probabilités demandées seront données à  $10^{-3}$  près.*

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.

Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

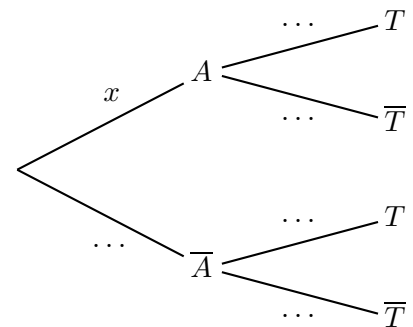
On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- $A$  l'évènement « l'individu est allergique » ;
- $T$  l'évènement « l'individu présente un test positif ».

On appelle par ailleurs  $x$  la probabilité de l'évènement  $A$  :  $x = p(A)$ .

#### Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2. (a) Démontrer l'égalité :  
 $p(T) = 0,927x + 0,043$ .  
(b) En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.
3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :  
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».



#### Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.

On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,17.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $X$  ? Justifier et préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

## Exercice 4 (5 points)

En mai 2024, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2024, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite  $(a_n)$ .

Le terme  $a_n$  désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le  $n$ -ième mois après le mois de mai 2024. Ainsi  $a_0 = 200$ .

### Partie A :

1. Calculer  $a_1$ .
2. Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par:  $v_n = a_n - 3\,000$ .
  - (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $0,85$ .
  - (b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - (c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$ .
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

### Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où  $u_n$  désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de  $n$  mois après le mois de mai 2024.

1. Démontrer que la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in [0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

- (b) Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.