Baccalauréat général blanc

Épreuve du jeudi 27 février

Enseignement de spécialité

MATHÉMATIQUES

Correction

Exercice 1

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$$

1. *Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.*

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty \end{array}\right\} \text{par composition, } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x + \frac{1}{2} = -\infty \end{array}\right\} \text{par produit, } \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} = -\infty$$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\ e^{-x} + \dfrac{e^{-x}}{2} + x = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{2e^x} + x.$

$$\left.\begin{array}{r} \text{par croissances comparées, } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{par somme, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. *On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.*

   (a) *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right) e^{-x}$.*

   $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

   $f'(x) = 1 \times e^{-x} + \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \times (-1)e^{-x} + 1 = \left(-x + \dfrac{1}{2}\right) e^{-x} + 1$

   $f''(x) = -1 \times e^{-x} + \left(-x + \dfrac{1}{2}\right) \times (-1)e^{-x} = \left(x - \dfrac{3}{2}\right) e^{-x}.$

   (b) *En déduire le sens de variation et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.*

   Le signe de f'' donne le sens de variation de f'.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x - \dfrac{3}{2}$:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'()$		$\searrow$	$1 - e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	

f' admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$ égal à $1 - e^{-\frac{3}{2}}$ atteint pour $x = \dfrac{3}{2}$.

(c) *Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.*

La fonction f' admet pour minimum $1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,78 > 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

(d) *En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.*

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable).
- Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- D'après le calcul des limites, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

(e) *Donner une valeur arrondie de α à 10^{-3} près.*

A la calculatrice, par une méthode de balayage, on obtient que $\alpha \approx -0,285$ à 10^{-3} près.

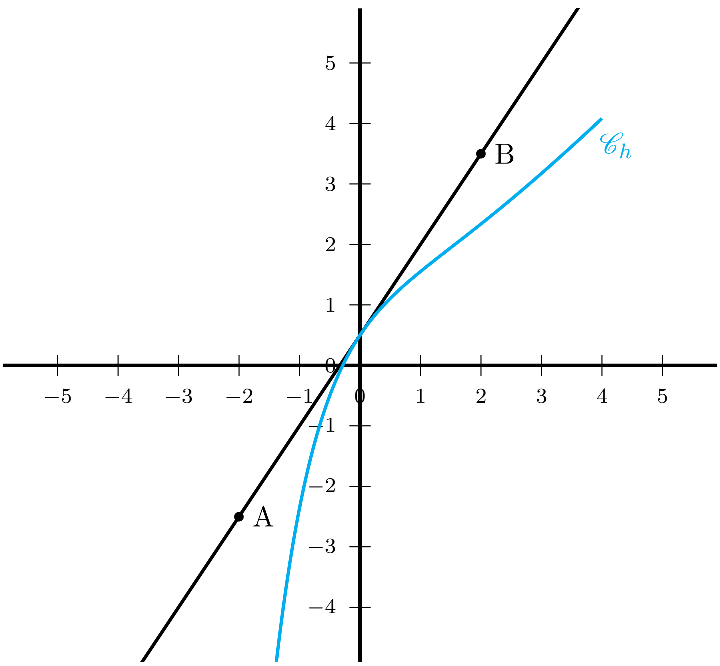
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)e^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- *la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h ;*
- *les points A et B de coordonnées respectives $(-2\ ; -2,5)$ et $(2\ ;\ 3,5)$.*



1. *Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.*

   On peut conjecturer que la courbe représentative de la fonction h admet un unique point d'inflexion d'abscisse $1,5$ environ.

2. *Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression*

$$h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x}$$

valider ou non la conjecture précédente.

Pour tout réel x, $h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x} = f''(x)$.

D'après la question A 2.(b), $h''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = \frac{3}{2}$ uniquement. Donc $\mathscr{C}_h$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $1,5$. La conjecture est donc vérifiée.

3. *Déterminer une équation de la droite (AB).*

A et B n'ayant pas la même abscisse, (AB) a pour coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = 1,5$

L'ordonnée à l'origine est $p = y_A - m \times x_A = -2,5 - 1,5 \times (-2) = 0,5$.

Donc (AB) a pour équation réduite : $y = 1,5x + 0,5$.

4. *Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.*

(AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0 et son ordonnée à l'origine est $0,5$, donc $h(0) = 0,5$.

Or $h(0) = (a \times 0 + b)\ e^{-0} + 0 = b$. Donc $b = 0,5$.

Par ailleurs, comme le coefficient directeur de (AB) est $1,5$, on en déduit que $h'(0) = 1,5$.

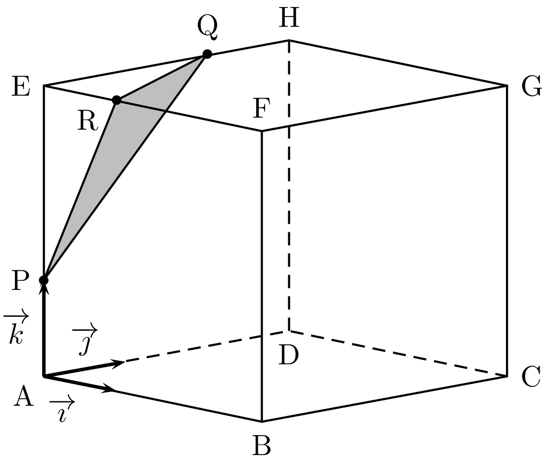
Or, pour tout réel x, $h'(x) = a\ e^{-x} - (ax + 0,5)\ e^{-x} + 1 = (-ax - 0,5 + a)\ e^{-x} + 1$.
Donc $h'(0) = -0,5 + a + 1 = a + 0,5$.

Par conséquent, a est solution de l'équation, $a + 0,5 = 1,5$ d'où $a = 1$.

Exercice 2

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ *de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :*

$$B(3\ ;\ 0\ ;\ 0),\quad D(0\ ;\ 3\ ;\ 0)\quad \text{et}\quad E(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$$



On considère les points $P(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $Q(0\ ;\ 2\ ;\ 3)$ *et* $R(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$.

1. *Placer les points P, Q et R sur la figure en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.*
2. *Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.*

   $\overrightarrow{PR}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ ne sont pas colinéaires (car $1\times(-2)-0\times 1=-2\neq 0$) donc les points P, Q et R ne sont pas alignés : les points P, Q et R définissent bien un plan.
3. *On s'intéresse à présent à la distance entre le point E et le plan (PQR).*

   Soit L le point de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$.

   (a) *Montrer que le vecteur* $\overrightarrow{LE}$ *est normal au plan (PQR).*

   $\overrightarrow{LE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

   Le repère étant orthonormé,

   $$\overrightarrow{LE}.\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=-\frac{2}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 2=0\ ,$$

   $$\text{et } \overrightarrow{LE}.\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=-\frac{2}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times(-2)+\frac{1}{3}\times 0=0\ .$$

   $\overrightarrow{LE}$ étant orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan (PQR), $\overrightarrow{LE}$ est un vecteur normal au plan (PQR).

(b) *Montrer que L appartient au plan (PQR).*

$\overrightarrow{LR}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{LR} = \alpha\overrightarrow{PR} + \beta\overrightarrow{QR} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{3} = \alpha + \beta \\ -\dfrac{1}{3} = -2\beta \\ \dfrac{1}{3} = 2\alpha \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{1}{3} == \dfrac{1}{6} + = \dfrac{1}{6} \\ \beta = \dfrac{1}{6} \\ \alpha = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Le système a un couple solution $\left(\alpha = \dfrac{1}{6}, \beta = \dfrac{1}{6}\right)$, donc les vecteurs $\overrightarrow{LR}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont coplanaires, ce qui implique que L appartient au plan (PQR).

(c) *Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).*

D'après les questions précédentes, L est le projeté orthogonal de E sur le plan (PQR). Par conséquent, la distance entre le point E et le plan (PQR) est LE :

$$LE = \left|\left|\overrightarrow{LE}\right|\right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4. *En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre $EPQR$ est $\dfrac{2}{3}$.*

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante}$$

Le triangle EQR est rectangle en E, donc $\mathcal{A}_{EQR} = \dfrac{ER \times EQ}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.

Dans le tétraèdre $EPQR$, la hauteur relative à la face EQR est $[EP]$ et $EP = 2$.

Donc, $V_{EPQR} = \dfrac{1}{3} \times 1 \times 2 = \dfrac{2}{3}$

5. *Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle PQR.*

Dans le tétraèdre $EPQR$, d'après la question 3.(c), la hauteur relative à la face PQR est $[LE]$.

Donc :

$$V_{EPQR} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{PQR} \times LE \iff \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{PQR} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\iff \frac{\sqrt{6}}{9} \times \mathcal{A}_{PQR} = \frac{2}{3}$$
$$\iff \mathcal{A}_{PQR} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{\sqrt{6}}$$
$$\iff \mathcal{A}_{PQR} = \sqrt{6}$$

Exercice 3

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*
Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.

Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- *Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas;*
- *Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.*

Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- *A l'évènement « l'individu est allergique » ;*
- *T l'évènement « l'individu présente un test positif ».*

On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : $x = p(A)$.

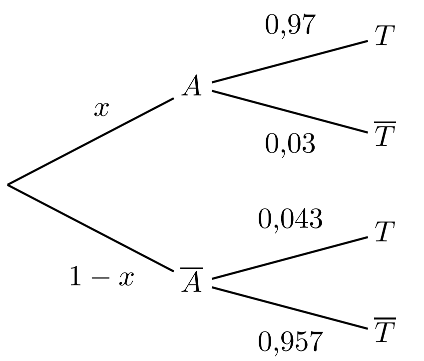
Partie A

1. *Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.*

   D'après l'énoncé :

   - $p_A(T) = 0,97$;
   - $p_{\overline{A}}\left(\overline{T}\right) = 0,957$;
   - $p(T) = 0,2$.

   D'où l'arbre pondéré :



2. (a) *Démontrer l'égalité : $p(T) = 0,927x + 0,043$.*

   Comme A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales : $p(T) = p(A \cap T) + p\left(\overline{A} \cap T\right) = p(A) \times p_A(T) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(T) = x \times 0,97 + (1 - x) \times 0,043 = 0,97x + 0,043 - 0,043x = 0,927x + 0,043$.

(b) *En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.*

$p(T) = 0,2 \iff 0,927x + 0,043 = 0,2 \iff 0,927x = 0,157 \iff x = \dfrac{0,157}{0,927}$.

Or $\dfrac{0,157}{0,927} \approx 0{,}169\,4$ soit 0,169 au millième près.

La probabilité que l'individu choisi soit allergique est donc $p(A) \approx 0,169$.

3. *Justifier par un calcul l'affirmation suivante :*

« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».

L'affirmation se traduit par : $p_T(A) > 0,8$.

Or $p_T(A) = \dfrac{p(T \cap A)}{p(T)} = \dfrac{p(A \cap T)}{p(T)} = \dfrac{p(A) \times p_A(T)}{p(T)} \approx \dfrac{0,169 \times 0,97}{0,2} \approx 0{,}820$. L'affirmation est donc vraie.

Partie B

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 *habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.*

On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à $0,17$.

On note X *la variable aléatoire qui à un échantillon de* 150 *habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.*

1. *Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire* X *? Justifier et préciser ses paramètres.*

On répète 150 fois, de manière identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès « l'habitant est allergique » a pour probabilité $0,17$, La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,17$.

2. *Déterminer la probabilité que* 20 *personnes exactement parmi les* 150 *interrogées soient allergiques.*

La probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques est :

$P(X = 20) = \dbinom{150}{20} \times 0,17^{20} \times 0,83^{130} \approx 0{,}045$ au millième près.

3. *Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les* 150 *interrogées soient allergiques.*

La probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques est :

$P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14) \approx 1 - 0{,}006 \approx 0{,}994$ au millième près.

Exercice 4

En mai 2024, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2024, seuls 200 *d'entre eux ont choisi le télétravail.*

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % *de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois,* 450 *collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.*

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n *désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le* n*-ième mois après le mois de mai 2024. Ainsi* $a_0 = 200$.

Partie A :

1. *Calculer* a_1.

   Parmi les 200 employés qui avaient choisi le télétravail au mois de mai, 85 % poursuivent au mois de juin et 450 nouveaux employés s'y convertissent. Donc : $a_1 = 200 \times 0,85 + 450 = 620$.

2. *Justifier que pour tout entier naturel* n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

   De manière générale, le mois $n+1$, 85 % des télétravailleurs du mois n continuent à travailler de cette façon, ce qui représente $0,85 \times u_n$ employés auxquels s'ajoutent 450 nouveaux collaborateurs. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,85\ a_n + 450$.

3. *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout entier naturel* n *par:* $v_n = a_n - 3\,000$.

   (a) *Démontrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $0,85$.

   $$\begin{aligned} \forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} &= a_{n+1} - 3\,000 \\ &= 0,85\ a_n + 450 - 3\,000 \\ &= 0,85\ a_n - 2\,550 \\ &= 0,85\ (v_n + 3\,000) - 2\,550 \\ &= 0,85\ v_n + 2\,550 - 2\,550 \\ &= 0,85\ v_n \end{aligned}$$

   (v_n) est donc une suite géométrique de raison $0,85$.

   (b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n *pour tout entier naturel* n.

   (v_n) étant géométrique de premier terme $v_0 = a_0 - 3\,000 = -2\,800$ et de raison $q = 0,85$,
   $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -2\,800 \times 0,85^n$.

   (c) *En déduire que, pour tout entier naturel* n, $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.

   Ainsi, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n = v_n + 3\,000 = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.

4. *Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.*

$$\begin{array}{rcl}\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n & = & \left(-2\,800 \times 0,85^{n+1} + 3\,000\right) - (-2\,800 \times 0,85^n + 3\,000) \\ & = & -2\,800 \times 0,85^{n+1} + 2\,800 \times 0,85^n \\ & = & 2\,800 \times 0,85^n\,(1 - 0,85) \\ & = & 420 \times 0,85^n > 0\end{array}$$

(a_n) est donc strictement croissante.

A la calculatrice on obtient $a_{10} \approx 2\,449$ et $a_{11} \approx 2\,531$.

Donc le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 au bout de 11 mois.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2024.

1. *Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.*

   f est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions affines et, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

   $$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

   f' est strictement positive sur $[0; +\infty[$ donc f est strictement croissante.

2. (a) *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel*

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

   Pour tout entier naturel n, on définit la proposition $\mathcal{P}_n$: "$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$".

   - Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 1$ et $u_2 = \dfrac{9}{3} = 3$, on vérifie bien que $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $\mathcal{P}_0$ est bien vraie.
   - Hérédité : supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.
     Par hypothèse de récurrence $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
     Or f étant une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient :

     $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$$

     Comme $f(0) = 2 \geqslant 0$ et que $f(4) = 4$, on a bien : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$.
     $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

- Conclusion : d'après l'axiome de récurrence nous avons montré que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

(b) *Justifier que la suite (u_n) est convergente.*

D'après la question précédente, (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ. Comme (u_n) est bornée entre 0 et 4, $\ell \in [0;4]$.

(c) *Déterminer la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.*

f étant continue sur $[0;4]$ (car dérivable) et (u_n) convergeant vers $\ell \in [0;4]$, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;4]$.

Or,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{5x+4}{x+2} = x \\ &\iff 5x + 4 = x^2 + 2x \\ &\iff x^2 - 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

$x_1 = -1$ étant une solution évidente de l'équation sur $\mathbb{R}$, la seconde solution vérifie $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$ soit $x_2 = \dfrac{-4}{-1} = 4$.

L'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;4]$ est 4, donc (u_n) converge vers 4.

Dans le contexte de l'énoncé, cela signifie qu'à long terme, il y aura environ 4 000 collaborateurs satisfaits par ce dispositif.