Baccalauréat général blanc

Épreuve du lundi 3 mars

Enseignement de spécialité

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices ainsi que tout matériel de construction (règle, équerre, compas) sont les seuls outils autorisés.

Les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique ne peuvent être utilisées qu'en « mode examen ».

Vous vérifierez que votre sujet comporte bien 5 pages numérotées.

Exercice 1 (6 points)

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Partie B

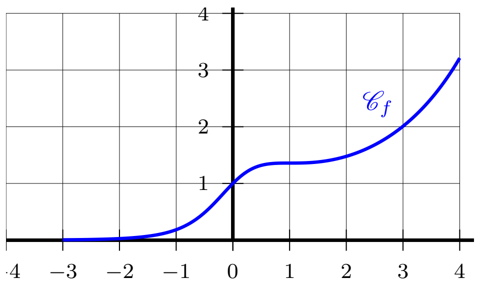
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

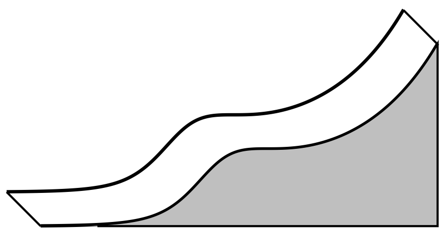
1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

   (b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

   (a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   (b) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

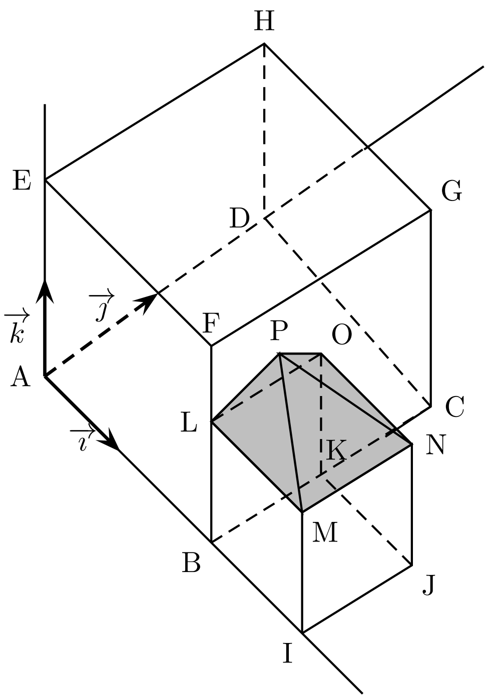
   où p est la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 2 (5 points)

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.

Il s'agit d'une maison de forme cubique ($ABCDEFGH$) accolée à un garage de forme cubique ($BIJKLMNO$) où L est le milieu du segment $[BF]$ et K est le milieu du segment $[BC]$.

Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale ($LMNOP$) de base carrée $LMNO$ et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, avec $\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
2. L'architecte place le point P aux coordonnées $\left(2\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)$.
   (a) Montrer que P est bien un point du plan (BCF).
   (b) Montrer que P est l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
3. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$.
   (b) Calculer la distance PM.
   On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.
   (c) Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
   Le toit pourra-t-il être construit ?
4. Le point P est-il le projeté orthogonal du point C sur le plan (LMH) ? Justifier.

Exercice 3 (4 points)

Les parties A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.

  Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.

Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les évènements contraires de J et T.

Partie A

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.

   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.
3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.

   Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.

Partie B

On choisit au hasard 120 personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels. On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X. Justifier.
2. Calculer la probabilité, au millième près, qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

Partie A

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3}\ ;\ 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3}\ ;\ 2\right]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.

   Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x : $f(x) - x = \dfrac{3}{4}(x-2)^2$.

Partie B

On considère la suite numérique (u_n) de premier terme u_0 et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right)$$

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

1. Démontrer que (u_n) est croissante.
2. Étude du cas : $\dfrac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Prouver que la limite de la suite est égale à 2.
3. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.

   On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

   Recopier et compléter la fonction `seuil` suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```python
def seuil() :
    u = 3
    n = 0
    while ......... :
        u = ........
        n = ........
    return n
```

4. Étude du cas : $u_0 > 2$.

   À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que (u_n) n'est pas convergente.