

Baccalauréat général blanc

Épreuve du lundi 3 mars

Enseignement de spécialité

MATHÉMATIQUES

Correction

Exercice 1

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

La fonction p est dérivable sur $[-3 ; 4]$.

$$\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) > 0$.
Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α .

- p est continue sur $[-3 ; 4]$ (car dérivable).
- p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.
- $0 \in p([-3 ; 4]) = [-68 ; 37]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-3 ; 4]$.

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près.

À la calculatrice, par la méthode de balayage on obtient $\alpha \approx -0,18$ au centième près.

4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

Sur $[-3 ; 4]$, p étant strictement croissante et ne s'annulant qu'en α , son tableau de signes est le suivant :

x	-3	α	4
$p(x)$		0	

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

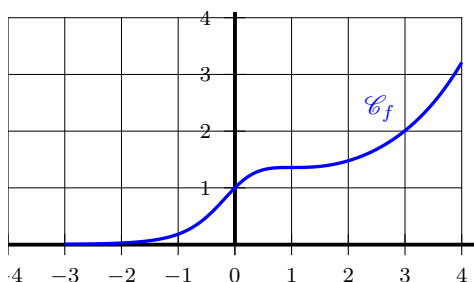
f est dérivable sur $[-3 ; 4]$ d'après les théorèmes usuels (quotients) et :

$$\forall x \in [-3 ; 4], f'(x) = \frac{e^x \times (1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}$$

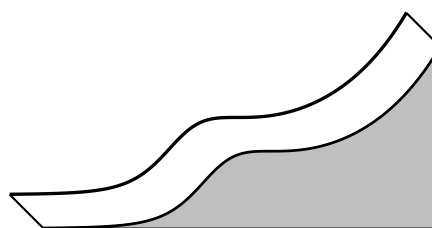
- (b) Justifier que la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

$$f'(1) = \frac{(1-1)^2 e^1}{(1+1^2)^2} = 0. \text{ Donc } \mathcal{C}_f \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.}$$

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe \mathcal{C}_f comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe \mathcal{C}_f



Vue de profil du toboggan

- (a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

Avec la précision permise par le graphique, il semble que la fonction f est :

- convexe sur $[-3 ; 0]$;
- concave sur $[0 ; 1]$;
- convexe sur $[1 ; 4]$.

Donc \mathcal{C}_f semble admettre deux points d'inflexion, d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$ environ.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

- (b) On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

$\forall x \in [-3 ; 4]$, $(1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

Le tableau de signes de f'' est donc le suivant :

x	-3	α	1	4
$p(x)$	-	0	+	+
$x-1$	-		-	0
$f''(x)$	+	0	-	0

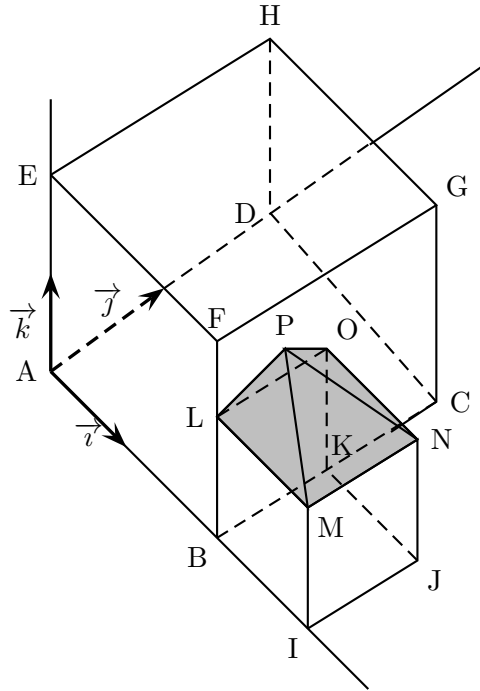
La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc \mathcal{C}_f admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

Exercice 2

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.

Il s'agit d'une maison de forme cubique ($ABCDEFGH$) accolée à un garage de forme cubique ($BIJKLMNO$) où L est le milieu du segment $[BF]$ et K est le milieu du segment $[BC]$.

Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale ($LMNOP$) de base carrée $LMNO$ et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{AE}$.

1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H , M et N .

Dans le repère choisi, les points H , M et N ont les coordonnées suivantes :

$H(0 ; 2 ; 2)$, $M(3 ; 0 ; 1)$ et $N(3 ; 1 ; 1)$.

2. L'architecte place le point P aux coordonnées $(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3})$.

- (a) Montrer que P est bien un point du plan (BCF) .

Démontrons pour cela que les vecteurs \vec{BP} , \vec{BC} et \vec{BF} sont coplanaires.

\vec{BP} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, \vec{BC} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et \vec{BF} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Il est clair que l'on a la relation : $\vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{BF}$.

Les vecteurs \vec{BP} , \vec{BC} et \vec{BF} étant coplanaires, P appartient bien au plan (BCF) .

(b) Montrer que P est l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF) .

$$\overrightarrow{HP} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HM} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\frac{3}{2} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \times 2 \\ -\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \\ -\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{HM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{HP}$. Les vecteurs \overrightarrow{HP} et \overrightarrow{HM} étant colinéaires, $P \in (HM)$ et d'après la question précédente, P est bien l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF) .

3. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.

$$\overrightarrow{PM} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{PN} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \text{ La base étant orthonormée :}$$

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

(b) Calculer la distance PM .

$$PM = \|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.

(c) Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle \widehat{MPN} ne dépasse pas 55° .

Le toit pourra-t-il être construit ?

$$\text{On sait que : } \cos(\widehat{MPN}) = \cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}}{PM \times PN} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3}} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{\sqrt{154}}{9}} = \frac{8}{\sqrt{154}}.$$

$$\text{Ainsi, } \widehat{MPN} = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{154}}\right) \approx 50^\circ.$$

Le toit pourra donc être construit.

4. Le point P est-il le projeté orthogonal du point C sur le plan (LMH) ? Justifier.

$$\overrightarrow{CP} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HM} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \times 3 - \frac{4}{3} \times (-2) + \frac{4}{3} \times (-1) = \frac{4}{3} \neq 0.$$

Le vecteur \overrightarrow{CP} n'étant pas orthogonal au vecteur \overrightarrow{HM} , il ne peut être normal au plan (LMH) . La droite (CP) n'est donc pas perpendiculaire au plan (LMH) et P n'est pas le projeté orthogonal de C sur le plan (LMH) .

Exercice 3

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.

Dans tout l'exercice on considère les événements suivants :

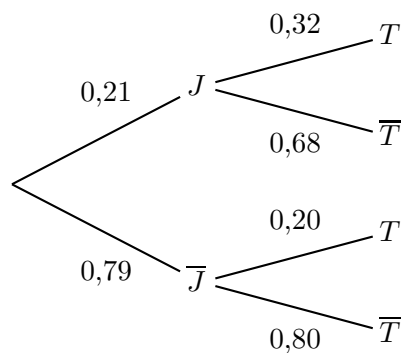
- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- \bar{J} et \bar{T} sont les événements contraires de J et T .

Partie A

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

La situation peut se traduire par l'arbre pondéré suivant :



L'événement « la personne interrogée a moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels » est $J \cap T$:

$$P(J \cap T) = P(J) \times P_J(T) = 0,21 \times 0,32 = 0,0672.$$

2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T .

Comme J et \bar{J} forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(J \cap T) + p(\bar{J} \cap T) = 0,0672 + 0,79 \times 0,20 = 0,2252.$$

3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.

Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est 0,30 à 10^{-2} près.

Calculons la probabilité de l'événement \bar{J} sachant T :

$$P_T(J) = \frac{P(T \cap J)}{P(T)} = \frac{P(J \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0672}{0,2252} \approx 0,298, \text{ soit } 0,30 \text{ au centième près.}$$

Partie B

On choisit au hasard 120 personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels. On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X . Justifier.

On répète 120 fois, de manière identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès « la personne a moins de 35 ans » a pour probabilité 0,3. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,3$.

2. Calculer la probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.

La probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 interrogés aient moins de 35 ans est :

$$P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49) \approx 1 - 0,996 \approx 0,004 \text{ au millième près.}$$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

Partie A

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 3 = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Factorisons par le terme prépondérant en $+\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 = \frac{3}{4}x^2 \left(1 - \frac{8}{3x} + \frac{4}{x^2}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{8}{3x} + \frac{4}{x^2} = 1 \end{array} \right\} \text{par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- (b) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{3}{2}x - 2$.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$

2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

D'après le résultat précédent, la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

On a donc : $\frac{4}{3} \leq x \leq 2 \implies f\left(\frac{4}{3}\right) \leq f(x) \leq f(2)$.

Or $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$ et $f(2) = 2$.

Ainsi, si $x \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$, alors $\frac{5}{3} \leq f(x) \leq 2$ et donc, $\frac{4}{3} \leq f(x) \leq 2$.

3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leq f(x)$.

Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x : $f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4) = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

Or $(x-2)^2 \geq 0$ sur \mathbb{R} , donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2 \geq 0$.

On en déduit que pour tout réel x , $x \leq f(x)$.

Partie B

On considère la suite numérique (u_n) de premier terme u_0 et telle que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

1. Démontrer que (u_n) est croissante.

D'après la question A 3., $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq f(u_n)$, c'est-à-dire, $u_n \leq u_{n+1}$. (u_n) est donc croissante.

2. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$.

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2$.

Pour tout entier naturel n , on définit la proposition \mathcal{P}_n : " $u_n \leq 2$ ".

- Initialisation : Par hypothèse $u_0 \leq 2$, donc \mathcal{P}_0 bien vraie.
- Hérédité : supposons la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $u_n \leq 2$. Montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq 2$.

Par hypothèse de récurrence $u_n \leq 2$.

De plus, (u_n) étant croissante, $u_n \geq u_0 \geq \frac{4}{3}$. Ainsi, $u_n \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

D'après la question A 2., on en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$ et, en particulier, que $u_{n+1} \leq 2$.

\mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

- Conclusion : d'après l'axiome de récurrence nous avons montré que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après les deux questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ . De plus, comme (u_n) est bornée entre $\frac{4}{3}$ et 2, $\ell \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

(c) Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

f étant continue sur $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$ (car dérivable) et (u_n) convergeant vers $\ell \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$, d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

Or,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff f(x) - x = 0 \\ &\iff \frac{3}{4}(x-2)^2 = 0 \quad (\text{d'après la partie A}) \\ &\iff x - 2 = 0 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

Nécessairement (u_n) converge vers 2.

3. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.

On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Recopier et compléter la fonction `seuil` suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```

def seuil() :
    u = 3
    n = 0
    while u < 100 :
        u = 3/4*u**2-2*u+3
        n = n+1
    return n

```

4. *Étude du cas : $u_0 > 2$.*

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que (u_n) n'est pas convergente.

Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ .

(u_n) étant croissante, d'après B 1., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$.

Par conséquent $\ell \in [u_0; +\infty[$ et donc $\ell > 2$.

f étant continue sur \mathbb{R} , d'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[u_0; +\infty[$. Or l'unique solution dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = x$ est $x = 2$. Donc $\ell = 2$.
 Contradiction.

Par conséquent, (u_n) est divergente.