Devoir maison n°2

Suite de Héron - type Bac

PARTIE 1 : Étude d'une fonction f

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x})$.

1.a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
1.b) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.
1.c) Démontrer que si $x \geq \sqrt{2}$ alors $f(x) \geq \sqrt{2}$.

PARTIE 2 : Étude de la suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

2.a) Déterminer u_1, u_2, u_3 à 0.1 près
2.b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2.c) En déduire que (u_n) est convergente.
2.d) On note l la limite de la suite u. Démontrer que l est solution de l'équation $l = \dfrac{1}{2}(l + \dfrac{2}{l})$.
2.e) En déduire la valeur de l.
2.f) Que faut-il changer à la définition de la suite (u_n) pour qu'elle converge vers $\sqrt{3}$.

Devoir maison n°2

Suite de Héron - type Bac

PARTIE 1 : Étude d'une fonction f

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x})$.

1.a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
1.b) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.
1.c) Démontrer que si $x \geq \sqrt{2}$ alors $f(x) \geq \sqrt{2}$.

PARTIE 2 : Étude de la suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

2.a) Déterminer u_1, u_2, u_3 à 0.1 près
2.b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2.c) En déduire que (u_n) est convergente.
2.d) On note l la limite de la suite u. Démontrer que l est solution de l'équation $l = \dfrac{1}{2}(l + \dfrac{2}{l})$.
2.e) En déduire la valeur de l.
2.f) Que faut-il changer à la définition de la suite (u_n) pour qu'elle converge vers $\sqrt{3}$.