Devoir maison : Calcul littéral

On considère des réels a,b,c quelconques.

Exercice 1

Montrer que $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Exercice 2

Développer et réduire $(a+b)^3$ *On commencera par* $(a+b)^3=(a+b)\times(a+b)^2=(a+b)\times(...)$

Exercice 3 *facultatif et dur* **Identité de Brahmagupta**

(Mathématicien Indien du 6ème siècle)

Dans tout l'exercice, a,b etn désigne des entiers naturels.

1) Démontrer l'identité de Brahmagupta : $(a^2-nb^2)^2=(a^2+nb^2)^2-n(2ab)^2$

Attention : $nb^2=n\times b^2=n\times(b^2)$

Utilisation pour l'approximation de $\sqrt{3}$

2) On pose $A=a^2+nb^2$ et $B=2ab$. L'identité devient alors $(a^2-nb^2)^2=A^2-nB^2$

Brahmagupta remarque que $2^2-3\times1^2=1$, c'est son point de départ.
En posant $a=2,\ b=1$ et $n=3$, il détermine alors deux nouveaux nombres entiers A et B tels que $A^2-nB^2=(a^2-nb^2)^2=1^2=1$.
Il trouve $A=7, B=4$

En appliquant les formules définissant A et B, retrouvez les réponses de Brahmagupta.

3) On a donc l'égalité : $7^2-3\times4^2=1$.
Il refait le même procédé qu'à la question 2 et trouve une nouvelle paire de nombres $A'=97, B'=56$

Expliquez les réponses de Brahmagupta.

4) **En réitérant le procédé, déterminez la paire de nombres suivante.**

5) Nous avons vu (cf. 3) que $97^2-3\times56^2=1$

Montrer que $\left(\frac{97}{56}\right)^2=3+\frac{1}{56^2}$

6) **En calculant** $\frac{1}{56^2}$ **expliquez pourquoi on peut dire que** $3\approx\left(\frac{97}{56}\right)^2$.

7) **En déduire une fraction proche de $\sqrt{3}$.**

8) **A l'aide de la calculatrice, déterminez l'écart entre la valeur réelle et cette fraction ?** *Donnez la réponse en écriture scientifique.*

9) **En reprenant les valeurs trouvées en 4. , determinez une autre fraction proche de $\sqrt{3}$ ainsi que son écart avec la valeur exacte.**

10) Si je voulais appliquer la même méthode pour estimer $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$), il me faut trouver l'égalité de départ.

Compléter : $...^2 - 2 \times ...^2 = 1$ **ainsi que** $...^2 - 5 \times ...^2 = 1$

Faire au brouillon un tableau comme celui-ci peut aider :

n^2	$2n^2$	$5n^2$
1	2	5
4	8	20
...	...	...