

# Cours : Logarithme

Les logarithmes ont été découverts par John Néper (1550-1617). Il cherchait une fonction transformant les produits (long à calculer) en somme (facile à calculer). Le logarithme qu'il a utilisé est le logarithme décimal, celui utilisé en maths est le logarithme népérien, qui porte son nom en hommage.

## I) Fonction réciproque

### Définition :

Soit une fonction  $f$  continue et strictement monotone sur un intervalle. On appelle fonction réciproque de  $f$ , la fonction  $g$  telle que :  $f(a)=b \Leftrightarrow a=g(b)$

### Propriété :

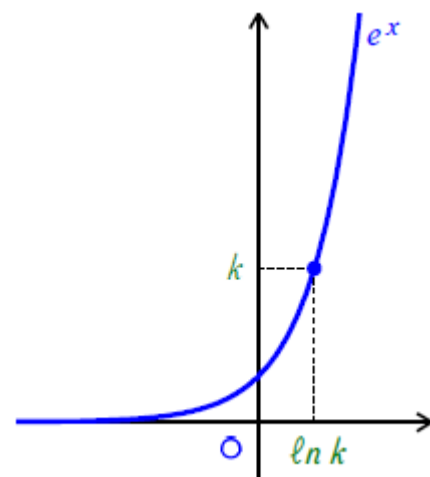
Les courbes d'une fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

### Exemples de fonctions réciproques:

## II) Fonction réciproque d'exponentielle

La fonction exponentielle est une fonction continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

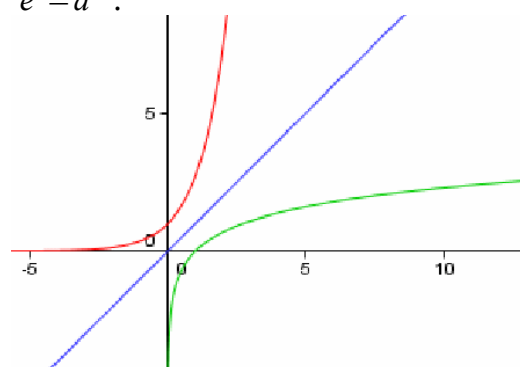
Nous avons les limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout  $k \in ]0; +\infty[$ , l'équation  $e^x = k$  admet une unique solution que nous noterons  $\ln(k)$ .



### Définition :

On appelle logarithme népérien l'unique fonction qui à un réel  $a$  strictement positif fait correspondre l'unique réel  $b$  tel que  $e^b = a$ .

$$\begin{array}{l} \ln : ]0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \quad \quad a \longrightarrow \ln a \end{array}$$



### Conséquences de la définition :

- 1)  $\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, x = e^y \Leftrightarrow \ln x = y$
- 2)  $\forall x > 0, e^{\ln x} = x$
- 3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$
- 4)  $\ln 1 = 0, \ln e = 1$  et  $\ln \frac{1}{e} = -1$

### Propriété :

La fonction  $\ln$  est strictement croissante.

### Démonstration :

Soit deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a < b$ .

Or  $a = e^{\ln a}$  et  $b = e^{\ln b}$  donc  $e^{\ln a} < e^{\ln b}$  et comme la fonction exponentielle est strictement croissante,

$$\ln a < \ln b$$

### Propriété :

Avec  $a > 0$  et  $b > 0$

$$1) \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

$$3) \ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$$

$$2) \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$

$$4) \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$$

### Démonstration :

1)  $\ln$  est croissante

2)  $\Rightarrow$  on applique l'exponentielle de chaque côté

3) et 4) on remplace 0 par  $\ln 1$  et on utilise la croissance de  $\ln$

### III) Formules à connaître par coeur

Avec  $a > 0$  et  $b > 0$

### Produit :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a_1 \times a_2 \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 \dots + \ln a_n$$

### Démonstration :

$$1) e^{\ln ab} = ab \text{ et } e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$$

Donc  $e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b}$  et finalement  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

2) La deuxième propriété se démontre par récurrence en utilisant la première (faite en exercice)

### Quotient :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Démonstration :

$$1) 0 = \ln 1 = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln \frac{1}{b} \text{ d'où } \ln b = -\ln \frac{1}{b}$$

$$2) \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

Puissance :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ln a^n = n \ln a$$

Démonstration :

On commence par le démontrer par récurrence pour tout entier positif, puis on remarque

$$\ln a^{-n} = \ln \frac{1}{a^n} = -\ln a^n \text{ pour conclure pour tout entier relatif.}$$

**Remarque :** Cette propriété est en fait valable pour un réel  $n$ . De manière générale on peut étendre la définition de puissance à des réels par  $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ .

Racine carrée :

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Démonstration :

$$\ln a = \ln \sqrt{a^2} = 2 \ln \sqrt{a}$$

#### IV) Etude de la fonction ln

La fonction ln est strictement croissante et est définie sur  $]0; +\infty[$ . Est-elle dérivable, continue ? Quelles sont ses limites ?

Dérivabilité :

$$\text{La fonction ln est dérivable sur } ]0; +\infty[ \text{ et pour tout } x > 0, \ln' x = \frac{1}{x}$$

Démonstration :

2) Soit un réel  $x > 0$ , si ln est dérivable alors nous pouvons dériver la composée  $f(x) = e^{\ln x}$  :

$$f'(x) = \ln' x \times e^{\ln x} = \ln' x \times x \text{ or } f(x) = x \text{ donc } f'(x) = 1$$

Et comme  $1 = \ln' x \times x$ , nous obtenons  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

1) Mais nous ne pouvons faire la démonstration ci-dessus que si ln est dérivable.

$$\text{Soit } a > 0 \quad \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{x - a}$$

on effectue le changement de variable  $\frac{x}{a} = e^X \Leftrightarrow X = \ln \frac{x}{a}$  et donc  $X \rightarrow \ln 1 = 0$

$$\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{x - a} = \frac{\ln e^X}{a e^X - a} = \frac{1}{a} \times \frac{X}{e^X - 1}$$

Comme  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ , on en déduit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{X}{e^X - 1} = 1$  et finalement :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a} \times \frac{X}{e^X - 1} = \frac{1}{a}$$

La fonction ln est dérivable en tout réel  $a > 0$  et  $\ln' a = \frac{1}{a}$

Soit  $u$  une fonction strictement positive,  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

Démonstration :

Dérivée d'une fonction composée

Continuité :

Il s'ensuit que la fonction  $\ln$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

Démonstration :

Toute fonction dérivable sur  $I$  est continue sur  $I$ .

Limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

Démonstration :

1) Soit un réel  $A$  (aussi grand que l'on veut),  $\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A$  donc pour n'importe quel réel  $x > e^A$ , nous avons  $\ln x > A$ . Ceci prouve que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} -\ln \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$  en posant le changement de variable  $X = \frac{1}{x}$

Remarque : La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale à la courbe de  $\ln$ .

Tableau de variation :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$\ln'(x)$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
signe de $\ln x$	-	0	+	

#### IV) Utilisation de de la fonction $\ln$

Propriété :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = \ln'(1+0) = 1 \quad \text{c'est un taux d'accroissement}$$

Croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

Démonstration :

On effectue le changement de variable  $x = e^X$ .

Retenez que, lors d'une forme indéterminée entre  $x$  et  $\ln$ , c'est  $x$  le plus fort.

## Logarithme décimal :

$\ln e = 1$  mais l'on peut définir un logarithme, vérifiant toutes les propriétés que nous avons énoncées mais tel que  $\log(10)=1$  par exemple.

La fonction  $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$  est appelée logarithme décimal.

C'est ce logarithme qu'a introduit John Néper pour simplifier les calculs. L'avantage de ce logarithme se révèle lors des calculs avec des puissances de 10 car  $\log 10^n = n$ . Ce logarithme est très utilisé en sciences pour changer d'échelle (et se placer sur une échelle logarithmique) : séismes, PH, gain, son (DB), musique (fret d'une guitare), ...

$$\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a$$

Le log vous permet aussi de savoir combien de chiffres sont nécessaires pour écrire un nombre avec la formule  $1 + \log N$  :

$$\log(2^{5689}) = 5689 \log 2 \approx 1712.6 \quad \text{il faut 1 713 chiffres pour écrire } 2^{5689}$$

**Pourquoi les physiciens préfèrent utiliser le log alors que les mathématiciens préfèrent le ln ?**

*Le ln a l'avantage d'être plus précis (dans le sens de l'utilisation), de permettre des dérivations sans apparition de constante.*

*Le log a l'avantage d'avoir les mêmes propriétés que le ln et de plus il simplifie les calculs en écriture scientifique (puissances de 10). Mais il est moins pratique en cas de dérivation.*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{alors que} \quad \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$