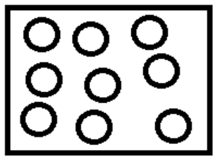
Chapiter 10 : Probabilité

La ***probabilité*** *est une évaluation du caractère* ***probable*** *d'un évènement. L'étude des probabilités est apparue avec l'étude des jeux de hasard. C'est au 17ème siècle que Blaise Pascal introduit le concept mais ce sera seulement en 1933 que A. Kolmogorov posera les bases de la théorie moderne des probabilités.*

Nous allons considérer tout au long de ce chapitre trois expériences aléatoires:

1ère	2ème	3ème
Je lance une pièce, je regarde si c'est pile ou face.	Je lance un dé à 6 faces, je regarde le numéro obtenu.	Dans une urne contenant 3 boules vertes, 5 boules rouges et une noire, je tire une boule et observe la couleur de celle-ci.
		

I) Vocabulaire

Ce sont trois **expériences aléatoires**, c'est-à-dire que c'est quelque chose de renouvelable, dont on connaît tous les résultats possibles mais dont l'on ne peut pas prédire le résultat.
Les résultats d'une expérience aléatoire sont les **issues**.
L'ensemble des issues est appelé **l'univers**. On le note souvent Ω .
Un **évènement** est une condition qui peut être, ou non, réalisée.
Un évènement **impossible** ne se réalise jamais.
Un évènement **certain** est sûr d'être réalisé.
L'évènement **contraire** d'un évènement A, noté $\overline{A}$, est l'évènement qui se réalise quand A ne se réalise pas.

1ère expérience :

Les issues sont pile ou face.
A : "obtenir pile" est un évènement
$\overline{A}$, l'événement contraire, est : "ne pas obtenir pile" c'est-à-dire "obtenir face"

2ème expérience :

Les issues sont les nombres inscrits sur les faces du dé : $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$.
Soit les événements B : "obtenir un nombre impair" et
C : "obtenir un nombre plus petit que 10".
C est un événement certain.
$\overline{B}$, l'événement contraire de B, est : "obtenir un nombre impair".

3ème expérience :

Les issues sont vert, rouge et noir.
Soit les événements D : "Obtenir une boule rouge ou noire" et
E : "Obtenir une boule blanche"
E est un événement impossible.
$\overline{D}$, l'événement contraire de D, est : "obtenir une boule verte"

II) Probabilité

Vous utilisez déjà de manière très intuitive les probabilités; quand vous dites que vous avez une chance sur deux d'obtenir face par exemple.
Nous formalisons juste les choses ce qui nous permettra de faire des exemples plus complexes.

Définition : Soit un évènement A.

La probabilité $\frac{n}{d}$ qu'à un évènement A de se réaliser signifie que A a n chances sur d de se réaliser.
On notera P (A).

Par définition, nous avons donc la formule:

$$\boxed{P(A)=\frac{nombres\ issues\ favorables}{nombres\ de\ cas\ total}}$$

P(A)= P("obtenir pile")=1/2=0,5

P(B)= P("obtenir un nombre impair") =1/2 ; P(C)=1

P(D)= P("rouge ou noir")=6/9 ; P(E)= P("blanche")=0/9=0 ; P($\overline{\text{D}}$)= P("vert")3/9

Propriété: La probabilité d'un évènement est toujours comprise entre 0 (évènement impossible) et 1 (évènement certain).

III) Union et intersection

On pourra être amené à considérer deux événements simultanés, c'est-à-dire que les événements sont réalisés en même temps ; on parlera d'intersection d'événements et on utilisera le symbole "inter" : $\cap$

Exemple :

Considérons un jeu de 32 cartes dans lequel on tire une carte au hasard.
Soient les événements :

A : "c'est un coeur"
B : "c'est un pique"
C : "c'est une figure"

Déterminez les probabilités des événements $A\cap B$ et $A\cap C$

On pourra être amené à considérer le succés d'au moins un événement, c'est-à-dire que l'un au moins des événements et réalisé ; on parlera de réunion d'événements et on utilisera le symbole "union" : $\cup$

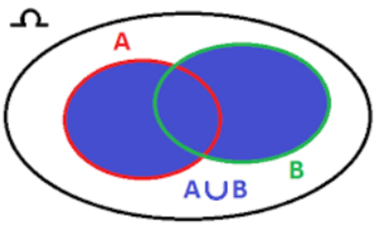
Exemple :

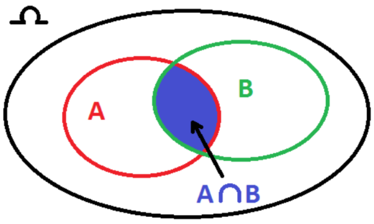
Considérons un jeu de 32 cartes dans lequel on tire une carte au hasard.
Soient les événements :

A : "c'est un coeur"
B : "c'est un pique"
C : "c'est une figure"

Déterminez les probabilités des événements $A\cup B$ et $A\cup C$

Diagramme de Venn :





Propriété :

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

Définition : Si $P(A\cap B)=0$, on dit que les événements A et B sont **incompatibles.**
On a alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

IV) Definition plus formelle

Définition : Soit une expérience aléatoire d'univers fini : $\Omega=\{e_1;e_{2...};e_n\}$
Définir une loi de probabilité sur Ω , c'est associer à chaque issue e_i un réel positif ou nul p_i ; ces réels vérifiant la relation :

$$\boxed{p_1+p_2+...+p_n=1}$$

Le nombre p_i est appelé probabilité de l'événement élémentaire $\{e_i\}$. On note $p_i=P(\{e_i\})$.
La probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme de toutes les probabilités associées aux issues qui réalisent A.

Nous avons par définition : $\boxed{P(\Omega)=1}$ $\boxed{P(\emptyset)=0}$ $\boxed{0\leq P(A)\leq 1}$

Définition : Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'on est dans une situation **d'équiprobabilité**.

S'il y a *n* événements élémentaires, la probabilité de chaque événement sera $\frac{1}{n}$

Propriété :

Soit un univers Ω muni d'une probabilité équiprobable.
La probabilité d'un événement A est :

$$\boxed{P(A)=\frac{nombre\ \ d'issues\ \ réalisant\ \ A}{nombres\ \ d'issues\ \ totales}}$$

Propriété :

$$\boxed{P(\bar{A})=1-P(A)}$$

Démonstrations : Admises

V) Simulation

Loi des grands nombres :

Lorsque l'on réalise une expérience aléatoire *n* fois de suite dans les mêmes conditions, la fréquence de succés d'un événement se rapproche de sa probabilité lorsque *n* devient très grand.

On peut donc, en simulant le lancé d'un dé 60 000 fois, s'attendre à avoir autour de 10 000 "1".

sur ti : Randint(1,20) *donne un entier aléatoire entre 1 et 20*

sur casio : RanInt#(1,20) *donne un entier aléatoire entre 1 et 20*

sur python : from random import *
randint(1,20) *donne un entier aléatoire entre 1 et 20*

Ecrire un algorithme simulant le lancé d'un dé à 6 faces.

Ecrire un algorithme simulant 100 lancés d'un dé à 6 faces et comptabilisant le nombre de 1.

sur ti : FOR(A,1,100) ...... END *refait 100 fois la même chose*

sur casio : FOR 1 $\rightarrow$ A To 100.........Next *refait 100 fois la même chose*

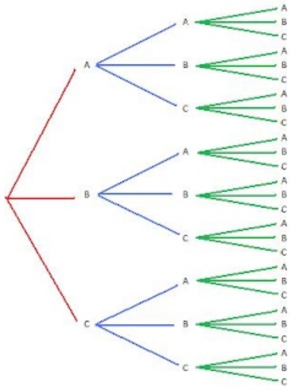
sur python : for i in range(100): *refait 100 fois la même chose*
....

Les arbres

VI) Pour dénombrer

Considérons un cadenas dont le code à 3 lettres est formé à partir de A,B et C (exemple de code AAA, BAB, CAB, etc). Combien y a-t-il de codes ?

Pour chercher toutes les combinaisons et être certain de n'en oublier aucune, il est plus simple de tracer un "arbre" où chaque nouvelle branche représente un choix.



En rouge choix de la 1ère lettre du code, en bleu la deuxième et en vert la troisième lettre.

En procédant de cette manière, nous sommes certains de n'oublier aucune combinaison; il y en a ici 27.

Chaque issue est équiprobable.

VII) Arbres pondérés

Hors programme

Un étudiant passe un concours qui se présente sous la forme d'un QCM. Chaque question est suivie de 5 réponses dont une seule est la bonne. Il a donc une chance sur 5 d'avoir juste en répondant au hasard et quatre chances sur 5 d'avoir faux.
Comme il n'a rien révisé et qu'il ne comprend rien, il s'en remet au hasard.

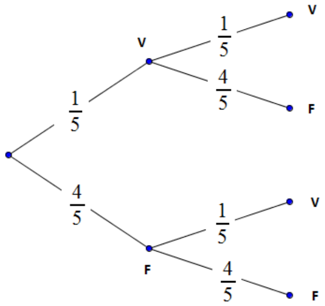
1/ Quelle est la probabilité qu'il ait 20/20 s'il y a deux questions dans le QCM?

2/Quelle est la probabilité qu'il ait 20/20 s'il y a trois questions dans le QCM?

3/Quelle est la probabilité qu'il ait 20/20 s'il y a vingt questions dans le QCM?

On notera V=vrai et F=faux. On a d'après l'énoncé, $P(V)=\frac{1}{5}$ et $P(F)=\frac{4}{5}$

1/ Construisons l'arbre pour la première question :

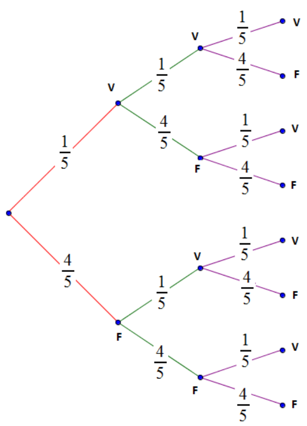


$P(VV)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$

La probabilité cherchée correspond à l'événement V V, c'est la ligne supérieur, il nous faut juste multiplier les deux probabiiltés sur le chemin $P(VV)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$

L'étudiant a donc une chance sur 25 d'avoir 20 sur 20.

2/ Construisons l'arbre pour la deuxième question :



$P(VVV)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{125}$

Il a une chance sur 125 d'avoir tout juste sur trois questions.

3/ Pour répondre à la troisième question, on utilise le même principe mais on ne construit pas l'arbre (il est bien trop gros).

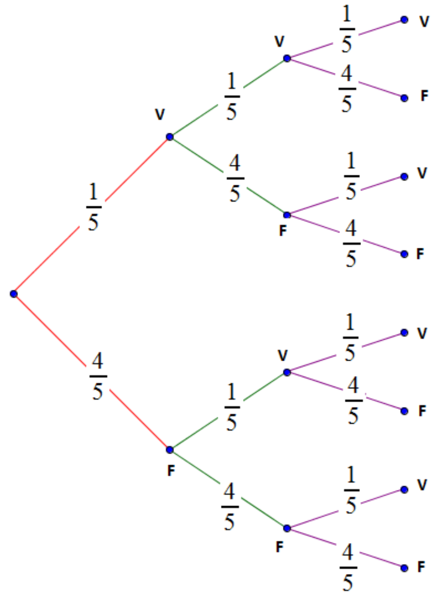
$$\boxed{P(\text{"avoir tout juste aux 20 questions"})=\left(\frac{1}{5}\right)^{20}\approx\frac{1}{10^{14}}}$$

La probabilité est quasiment nulle.

VIII) Probabilités de plusieurs combinaisons *Hors programme*

Pour obtenir la probabilité de plusieurs combinaisons, on additionne la probabilité de chaque combinaison.

Pour reprendre l'exemple précédent, quelle est la probabilité d'avoir au moins deux réponses fausses sur trois?



Il y a quatres possibilités VFF, FVF, FFV et FFF.

$$P(VFF)=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{125}$$

$$P(FVF)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{125}$$

$$P(FFV)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

$$P(FFF)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{64}{125}$$

Pour répondre à la question, il faut additionner toutes ces probabilités :

$$\boxed{P(\text{"avoir au moins 2 réponses fausses"})=\frac{16}{125}+\frac{16}{125}+\frac{16}{125}+\frac{64}{125}=\frac{112}{125}}$$

Il a 112 chances sur 125 d'avoir au moins deux réponses fausses sur les trois.