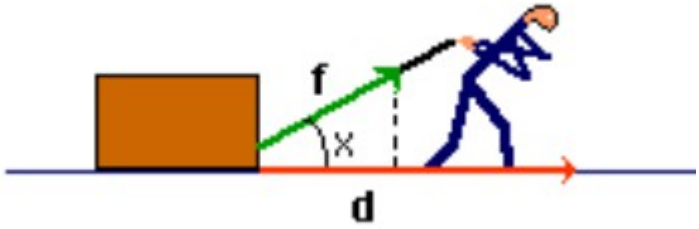
Cours : Produit scalaire

Rappel :

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la distance AB. *(Cela correspond à la longueur de la flêche.)*

Dans un repère orthonormé, on a la formule : $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x^2+y^2)}$

I) Le produit scalaire en physique



Vous savez qu'une force est représentée par un vecteur en physique. Mais on peut distinguer deux types de forces :

- les forces exercées ponctuellement : une poussée, un coup de marteau, ...
- les forces exercées continûments : tractions par exemple,....

Dans le deuxième cas, il faut considérer le vecteur force et le vecteur distance. Pour mesurer l'énergie, on calcule alors le travail exercé en calculant le produit scalaire des deux vecteurs.

Le travail est noté W et s'exprime en Joules.

Propriété :

$$W=\vec{f}.\vec{d}=\|\vec{f}\|\times\|\vec{d}\|\times\cos(\vec{f},\vec{d})$$

Remarques :

Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre**.

Si l'un des deux vecteurs est nul, on ne peut pas définir l'angle $(\vec{f},\vec{d})$ mais le travail devrait être logiquement égal à zéro : on pose $\forall\vec{u},\quad \vec{u}.\vec{0}=0$

Le produit scalaire est un produit, on peut distribuer, factoriser, utiliser les produits remarquables.

On ne note pas $\vec{a}\times\vec{b}$ mais $\vec{a}.\vec{b}$

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$$

$$(\lambda\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}.\vec{v})$$

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$

II) Produit scalaire et angles

On connaît des angles particuliers dont le cosinus se calcule très simplement.

Propriétés :

Si les deux vecteurs sont colinéaires et opposés :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

Si les deux vecteurs sont colinéaires, de même sens :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD$

Si les deux vecteurs sont orthogonaux :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Démontrez ces trois résultats.

III) Produit scalaire et coordonnées

La formule avec l'angle n'est pas très pratique si on ne connaît pas l'angle. Heureusement, on a une autre formule avec les coordonnées. On se place dans un repère orthonormé et on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Propriété :

$$\vec{u}\,\vec{v} = x\,x' + y\,y'$$

Démonstration :

On sait que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2$ et $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$

On a alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + 2.\vec{u}\,\vec{v} + \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$$(x+x')^2 + (y+y')^2 = x^2 + y^2 + 2\,\vec{u}\,\vec{v} + x'^2 + y'^2$$

$$x^2 + 2\,x\,x' + x'^2 + y^2 + 2\,y\,y' + y'^2 = x^2 + y^2 + 2\,\vec{u}\,\vec{v} + x'^2 + y'^2$$

$$x\,x' + y\,y' = \vec{u}\,\vec{v}$$

Application : pour déterminer un angle

On cherche à déterminer l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On commence par calculer le produit scalaire grace aux coordonnées :

$$\vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y' = 2 \times -1 - 3 \times 5 = -17$$

On va utiliser la formule avec le cos, nous avons besoin des normes :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{13} \quad , \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{26}$$

Nous obtenons donc :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$-17=\sqrt{13}\times\sqrt{26}\times\cos(\vec{u};\vec{v})$$

Finalement,

$$\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{-17}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}\approx-0{,}92 \quad \text{et} \quad \cos^{-1}(-0{,}92)\approx 157{,}6°$$

IV) Produit scalaire en géométrie

1) Orthogonalité

Définition :

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si l'angle entre ces deux vecteurs est un angle droit.

En considérant que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur :

Propriété :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

Cette propriété nous permet de démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux, elle permet de prouver que l'on a un angle droit.

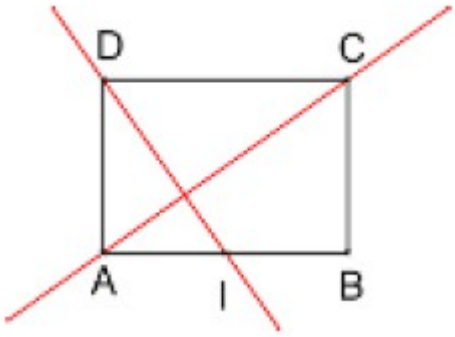
Application :

On considère un rectangle ABCD tel que :

$AD=\sqrt{2}$

$AB=2$

I milieu de [AB]

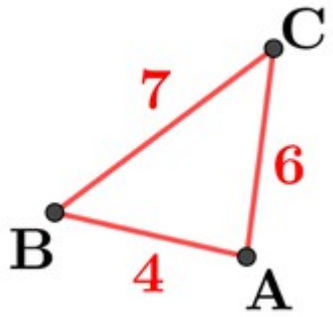


Démontrer que les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires.

2) Dans un triangle

Nous avons vu que $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\,.\,\vec{v}+\vec{v}^2$.

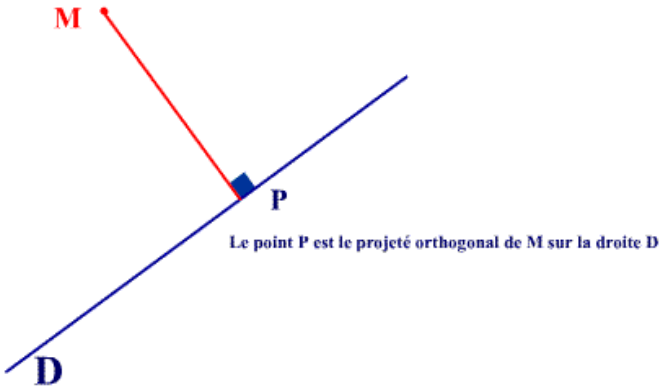
En isolant le produit scalaire, on obtient $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\frac{1}{2}(\vec{u}^2+\vec{v}^2-(\vec{u}-\vec{v})^2)$



$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

3) Projection orthogonale

Définition : Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite *(d)* est le point d'intersection de *(d)* et de la perpendiculaire à *(d)* passant par A.



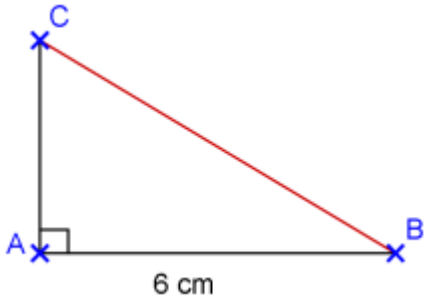
La projection orthogonale d'un vecteur sur une droite *(d)* est le vecteur obtenu en projetant les extrémités de ce vecteur sur *(d)*.

Application :

Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BC}$ sur (AB) est $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=36$$



autre façon :

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=36 \quad \textit{car} \quad \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=0$$