Cours : Application de la dérivation

I) Sens de variation

La dérivée d'une fonction en un point *a* est le coefficient directeur de la tangente (au même point) à la courbe de cette fonction. La tangente ayant, localement, les mêmes variations que la fonction, il s'ensuit un lien évident entre dérivée et sens de variation.

Rappel :

Si le coefficient directeur d'une droite est positif, alors la droite monte (elle est croissante).
Si le coefficient directeur d'une droite est négatif, alors la droite descend (elle est décroissante).

On en déduit le théorème suivant :

Théorème :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si, pour tout *x* de I, $f'(x)>0$ alors *f* est strictement croissante sur I.
Si, pour tout *x* de I, $f'(x)<0$ alors *f* est strictement décroissante sur I.
Si, pour tout *x* de I, $f'(x)=0$ alors *f* est constante sur I.

Démonstration : admise

Pour les fonctions compliquées dont on cherche les variations, on cherchera à déterminer le signe de la dérivée.

Exemple :

Cherchons le sens de variation de la fonction $f(x)=x^3+4x^2-3x+10$ définie sur $\mathbb{R}$

On a $f'(x)=3x^2+8x-3$

C'est un polynôme du second degré, on calcule le discriminant.

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=8^2+4\times3\times3=100>0$$ il y a deux solutions $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1}{3}$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-3$$

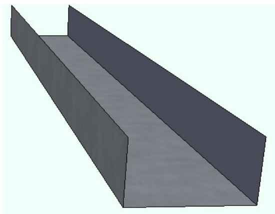
On dresse le tableau de signes et on en déduit les variations de *f*.

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $3x^2+8x-3$			
variations de *f*			

II) Utilisations

Avec le tableau de variation, on peut déterminer les extrema d'une fonction (ce qui permet de résoudre les problèmes d'optimisation), l'existence de solution pour des équations pour lesquelles nous n'avons pas de méthodes de résolution, le signe d'une fonction, ...

Exemple 1 : Construction d'une gouttière



A partir d'un rectangle de métal de 24 cm sur 1 m, on souhaite fabriquer une gouttière en rabattant les deux bords externes.

Quelle longueur faut-il rabattre pour que le volume de la gouttière soit maximum ?

Appelons x la longueur à rabattre.
La largeur de la gouttière est $24-2x$, la hauteur est x, sa profondeur est 100 cm.
Son volume est $V(x)=(24-2x)\times x\times 100=100(24x-2x^2)$

Dressons le tableau de variation de cette fonction :

$$V'(x)=100(24-4x)$$

x	$-\infty$		6		$+\infty$
signe de $24-4x$		+	0	−	
variations de V		↗		↘	

Le volume sera maximal avec $x = 6$ cm

Exemple 2 : Aide à la résolution d'une équation

Combien de solutions à l'équation $x^3-13x^2+52x-60=0$ dans l'intervalle [0 ; 10] ?
Donnez un encadrement de chacune de ses solutions.

Appelons f la fonction donnée dans l'énoncé.
Alors $f'(x)=3x^2-26x+52$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=26^2-4\times 3\times 52=52>0$$

Il y a deux solutions $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\approx 5{,}5$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\approx 3{,}1$

x	$-\infty$	0		$3{,}1$	$+\infty$
signe de $f'(x)$			+	0	
variations de f		-60	↗	6	

La fonction f est croissante de -60 jusqu'à 6, elle passe donc par zéro, il y a une solution dans l'intervalle [0 ; 3,1], de même, il y a une solution dans les intervalles [3,1 ; 5,5] et [5,5 ; 10].