

Chapitre 11 : Inéquations

I) Type $ax+b < cx+d$

Ces inéquations se résolvent comme les équations (les nombres sans x à gauche, le reste à droite et on divise par le nombre devant le x)

Attention : Si on divise (ou multiplie) par un nombre négatif, alors l'inégalité change de sens.

Exemple :

$$13x + 5 < 8x - 7$$

$$4x - (x + 7) \geq 10x + 6$$

$$13x - 8x < -7 - 5$$

$$3x - 7 \geq 10x + 6$$

$$5x < -12$$

$$3x - 10x \geq 6 + 7$$

$$x < \frac{-12}{5}$$

$$-7x \geq 13$$

$$x \geq \frac{-13}{7}$$

$$S =]-\infty; -\frac{12}{5}[$$

$$S = [-\frac{13}{7}; +\infty[$$

Application :

$$7x + 3 > 4$$

$$S = [\frac{1}{7}; +\infty[$$

$$9x - 5 \geq 10x - 2$$

$$S =]-\infty; 3]$$

$$181x < 181x + 3$$

$$S = \mathbb{R}$$

$$(x + 3) - (2x + 5) \leq -x - 10 \quad S = \emptyset \quad \text{"pas de solution"}$$

II) Tableau de signe

Il faudrait trouver une méthode plus générale.

En remarquant que $f(x) \geq 0$ se lit $f(x)$ est positif, on comprend que pour résoudre une inéquation, on peut chercher le signe d'une expression.

a) Racine et valeur interdite

Définition :

Soit une fonction f .

On appelle **racines** de f les réels tels que $f(x) = 0$. *(à ne pas confondre avec la racine carrée)*

Pour les trouver, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$; il y a deux cas :

- $f(x) = ax + b$ alors il y a une seule racine $-\frac{b}{a}$

- si f n'est pas une fonction affine, on factorise et on utilise le théorème de 3ème :

Théorème :

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Exemple :

$$f(x) = (x-1)(5-20x)$$

Racines :

$$x=1 \quad \text{et} \quad x=0,25$$

$$g(x) = (x+1)^2 - (2x-3)^2$$

$$g(x) = [(x+1) + (2x-3)][(x+1) - (2x-3)]$$

$$g(x) = [3x-2][-x+4]$$

Racines :

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x=4$$

Application :

$$f_1(x) = (71+x)(18-x)(50x-300)$$

$$f_2(x) = (5-x)^2(2x-(4x+8))$$

$$f_3(x) = (x-2)(5x+3) + (x-2)(5x+17)$$

Racines :

$$-71 ; 6 ; 18$$

$$-4 ; 5$$

$$-2 ; 2$$

Définition :

Soit f une fonction et a un réel.

On dit que a est une **valeur interdite** si, lors du calcul de $f(a)$, on tombe sur une interdiction.

Par exemple, il est interdit de diviser par zéro.

Exemple :

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)(x-5)}$$

vi : -3 et 5

Application :

$$f_1(x) = \frac{1}{7x-77}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2-10x+25}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(3-x)^2 - (5+2x)^2}$$

valeurs interdites :

$$11$$

$$5$$

$$-8 ; -\frac{2}{3}$$

b) Tableau de signe

Pour déterminer le signe d'une expression, on utilise la règle des signes (dans une multiplication ou une division).

Un nombre pair de signes moins donne plus.
Un nombre impair de signes moins donne moins.

Pour pouvoir utiliser ce théorème, il faudra mettre au même dénominateur et factoriser (de sorte à n'avoir aucune addition ou soustraction en dehors des parenthèses).

Ensuite, on déterminera les racines et les valeurs interdites (pour savoir à quel moment une expression change de signe).

Exemple :

Cherchons le signe de $f(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{-3x+15}$

racines : -2 et 3

vi : 5

Un facteur par ligne

On place les racines et les vi dans l'ordre croissant

x	$-\infty$	-2	3	5	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	0	+	+
$-x-5$	+	+	+	0	-
$f(x)$	+	0	-	0	-

On descend les racines

et les vi avec une double barre

Application :

$$\frac{(7-x)(30x-300)}{1+x} < 0$$

$$S =]-1; 7[\cup]10; +\infty[$$

$$\frac{14-7x}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$S =]-\infty; 2] - \{1\}$$

Plus dur $\frac{-15x+1}{x+1} > -9x$

$$S =]-1; +\infty[$$

III) Résolution graphique

Rappel

Si vous n'arrivez pas à factoriser, on peut toujours obtenir une solution approchée en utilisant un graphique.

Cette méthode marche tout le temps mais manque de précision (vous n'aurez pas de valeur exacte).

Exemple :

$$(x+1)(x-3) < -2x+3$$

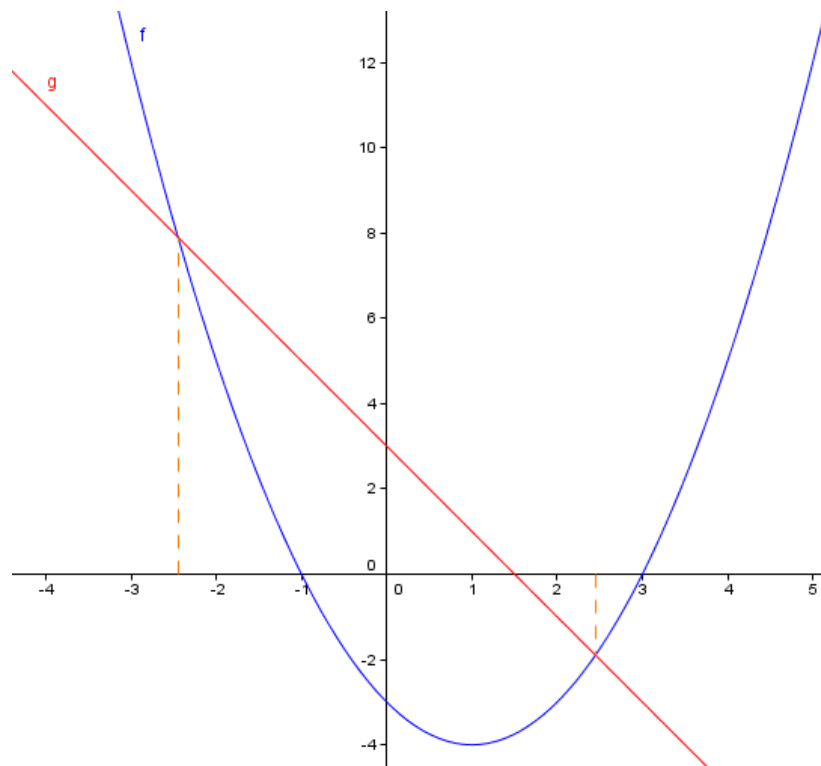
On ne peut pas factoriser donc on ne peut pas résoudre ceci avec un tableau de signe.

Nommons les deux membres de l'inéquation :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & & g(x) \\ \searrow & & \searrow \\ (x+1)(x-3) & < & -2x+3 \end{array}$$

Traçons dans un repère les courbes représentatives de ces deux fonctions.

On cherche les valeurs de x pour lesquelles la courbe de la fonction f est en-dessous de celle de g . Comme l'inégalité est stricte, on ne veut pas l'égalité donc on ne considère pas les points d'intersections.



La courbe de f est en dessous de la courbe de g de -2,4 environ jusqu'à 2,4 environ.

Donc :

$$S \approx]-2,4; 2,4[$$

Cette méthode vous permet de vérifier rapidement avec votre calculatrice que vous n'avez pas fait n'importe quoi.

On aurait pu factoriser cette inéquation en la développant dans un premier temps.

$$(x+1)(x-3) < -2x+3$$

$$x^2 - 2x - 3 < -2x + 3$$

$$x^2 - 6 < 0$$

$$(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) < 0$$

Les racines sont donc $\sqrt{6} \approx 2,45$ et $-\sqrt{6} \approx -2,45$

Un tableau de signe nous donne la solution :

$$S =]-\sqrt{6}; \sqrt{6}[$$

Application :

Résoudre graphiquement :

$$x^3 + 2x^2 \geq x + 2$$

$$S = [-2; -1] \cup [1; +\infty[$$

$$\sqrt{x} < x - 2$$

$$S =]4; +\infty[$$