

Cours : Primitives

I) Primitive d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Dire que la fonction F est une primitive de f signifie : F est dérivable sur I et $F' = f$

Propriété 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant une primitive F .

- 1) L'ensemble des primitives de f est $\{G(x) = F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$
- 2) Il existe une primitive de f et une seule telle que $G(a) = b$ avec a, b deux réels donnés.

Démonstration :

1) Attention il faut démontrer deux choses pour le point 1). Les fonctions de cet ensemble sont des primitives de f ET une primitive de f est forcément dans cet ensemble.

Si $G(x) = F(x) + C$ avec C un réel, alors il est évident que $G'(x) = F'(x) = f(x)$

Si G est une primitive de f , alors $(G - F)' = f - f = 0$ donc la fonction $G - F$ est constante.

Il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x , $G(x) - F(x) = C$ i.e. $G(x) = F(x) + C$.

2) (Si $G(a) = b$ alors $G(a) = F(a) + C = b$ d'où $C = b - F(a)$)

On pose donc $C = b - F(a)$ et $G(x) = F(x) + b - F(a)$

Méthode : Vérifier qu'une fonction est une primitive

C'est l'exercice le plus simple, on vous donne deux fonctions et on vous demande juste de vérifier que l'une est la dérivée de l'autre.

Vérifier que $F(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$ est une primitive de $f(x) = \frac{-x^2+2x+4}{(x^2+4)^2}$

Propriété 2 :

Toute fonction continue admet une primitive.

Démonstration :

On sait que toute fonction dérivable est continue (et la réciproque est fausse).

C'est la propriété "à l'envers".

Cela se démontre proprement mais nous allons l'accepter.

Remarque : Si l'existence est assurée, on ne peut pas forcément trouver une formule explicite. $f(x) = e^{-x}$ admet une primitive mais il n'existe pas de formule explicite de celle-ci.

II) Calculs de primitives

Chercher la primitive d'une fonction est l'opération inverse de la dérivation. On peut donc utiliser toutes les formules que l'on connaît pour dériver.

On sait que **la** dérivée de $f(x)=3x^2-5x+1$ est $f'(x)=6x-5$.

Donc **une** primitive de $f'(x)=6x-5$ est $F(x)=3x^2-5x+1$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

| Fonction f | Primitive |
|---------------------------------|-------------------------------|
| $k \in \mathbb{R}$ | $kx + C$ |
| x | $\frac{x^2}{2} + C$ |
| x^n avec $n \geq 1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\frac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$ | $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + C$ |
| e^x | $e^x + C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ |

Démonstration : Comme il s'agit d'une lecture inverse des formules de dérivations, il n'y a rien à redémontrer

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

| Fonction f | Primitive |
|----------------------------------|-------------------------------|
| $u' \times u$ | $\frac{u^2}{2} + C$ |
| $u' \times u^n$ avec $n \geq 1$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $\frac{u'}{u^2}$ | $\frac{-1}{u} + C$ |
| $\frac{u'}{u^n}$ avec $n \geq 2$ | $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + C$ |
| $u' \times e^u$ | $e^u + C$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u} + C$ |
| $u' \sin u$ | $-\cos u + C$ |
| $u' \cos u$ | $\sin u + C$ |

III) Equations différentielles

Lors de la résolution d'un problème, on a souvent une fonction à étudier. Mais il faut réussir à déterminer à quoi ressemble cette fonction. En étudiant les différentes contraintes du problème, dans lesquelles la dérivée de la fonction apparaît fréquemment (tangente, vitesse, variation, ...), on obtient une équation où l'inconnue est une fonction.

Définition :

On appelle équation différentielle une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction et où apparaît une ou des dérivées successives de f .

Remarque :

1) Les dérivées successives se notent $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}, \dots$.

2) Il est d'usage de noter y l'inconnue d'une équation différentielle.

3) L'ordre d'une équation différentielle est "l'exposant" de dérivée le plus élevé.

Définition :

On considère l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où $a \in \mathbb{R}$. On dit que c'est une équation homogène, il n'y a pas de terme constant.

Théorème :

Les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $f(x) = C e^{-ax}$ où C est un réel.

Démonstration :

1) Soit un réel C , montrons que $f(x) = C e^{-ax}$ est solution de l'équation.

$$y' = f'(x) = -a C e^{-ax} = -a f(x) \quad \text{Et donc} \quad y' + a y = -a C e^{-ax} + a C e^{-ax} = 0$$

2) Posons $f(x) = e^{-ax}$ qui est solution de l'équation d'après 1. et qui ne s'annule jamais.

Soit g une solution de l'équation (on ne sait pas à quoi elle ressemble).

$$\text{Donc} \quad g' + a g = 0 \quad \text{et} \quad g' = -a g$$

$$\text{On a alors} \quad \left(\frac{g}{f} \right)' = \frac{g' f - f' g}{f^2} = \frac{-a g f + a f g}{f^2} = 0$$

Ce qui signifie que la fonction $\frac{g}{f}$ est constante, il existe donc une constante k telle que $\frac{g(x)}{f(x)} = k$

Et donc $g(x) = k f(x) = k e^{-ax}$. g est bien de la forme $C e^{-ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$

Théorème :

Soit g une solution particulière de cette équation.
Les solutions de l'équation $y'+ay=b$ sont les fonctions
de la forme $f(x)=C e^{-ax}+g$ où C est un réel.

Démonstration :

Vue en cours

Méthode :

Pour résoudre une équation différentielle, on écrit la solution de l'équation homogène et on y ajoute "une" (n'importe laquelle) solution particulière. (on cherche la plus simple possible, une constante par ex)

Théorème :

Soit x_0 et y_0 deux réels. L'équation différentielle $y'+ay=b$ admet une unique solution f vérifiant la condition initiale $f(x_0)=y_0$.

Application pratique

La Culture de Bactéries

Imaginons un parachutiste qui saute d'un avion. Sa vitesse $v(t)$ évolue selon deux forces :

1. La gravité (qui le fait accélérer).
2. La résistance de l'air (qui le freine proportionnellement à sa vitesse).

D'après la deuxième loi de Newton, l'accélération v' est égale à l'accélération terrestre (g) - la résistance de l'air : $v' = g - kv$

Nous prendrons $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ et $k = 0.2$

Déterminer une expression de la vitesse en fonction du temps ?