

# Cours : Dénombrément

## I) Union et produit d'ensemble

### Définition :

Un ensemble  $E$  est dit **fini** lorsqu'il admet un ensemble fini d'éléments.

Le nombre d'éléments d'un tel ensemble est appelé le **cardinal**. On note  $\text{card}(E)$ .

**Dénombrer** signifie déterminer le cardinal d'un ensemble.

Exemple :

### Définition :

On dit que deux ensembles sont **disjoints** lorsqu'ils n'ont pas d'éléments en commun.

### Principe additif

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) + \dots + \text{card}(E_n)$$

**Remarque :** Si  $A$  et  $B$  ne sont pas disjoints, on considère :

$$A \cap \bar{B}, B \cap \bar{A}, A \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}$$

**Exemple :** Dans une classe, on interroge les élèves sur leurs activités sportives.

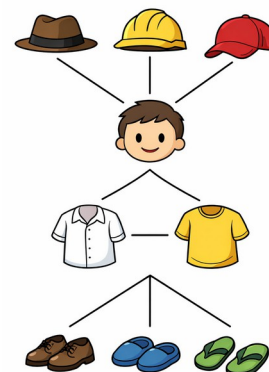
On sait que 18 élèves pratiquent le football, 15 élèves pratiquent le basket, 7 élèves pratiquent les deux sports et 9 élèves ne pratiquent aucun des deux sports.

Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Dans une app, je peux créer un avatar.

Je peux choisir un couvre-chef, un vêtement et une paire de chaussures.

Combien d'avatars différents puis-je créer ?



### Définition :

Le produit cartésien  $E_1 \times E_2$  est l'ensemble des **paires**  $(a, b)$  où  $a \in E_1, b \in E_2$

On définit de même les **triplets** comme les éléments du produit cartésien  $E_1 \times E_2 \times E_3$  et les **n-uplets** les éléments de  $E_1 \times \dots \times E_n$

### Principe multiplicatif

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des ensembles finis deux à deux disjoints.  
 $\text{card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \dots \times \text{card}(E_n)$

**Exemple :** Dans Fortnite, un personnage peut être personnalisé avec plusieurs catégories d'objets cosmétiques :

**Outfits (skins du personnage) :** environ 2 573 skins différents en 2026

**Back blings (sacs / accessoires de dos) :** environ 2 375

**Harvesting tools (pioches) :** environ 2 060

**Gliders (planeurs) :** environ 686

Combien de personnages différents sont possibles ?

### II) p-uplet et permutation

Soit  $E$  un ensemble tel que  $\text{card}(E)=n$ .

#### Dénombrons les permutations :

Les permutations de  $E$  sont constituées de tous les éléments de  $E$ , l'ordre est important.

*Il y a  $n!$  permutations.*

#### Exemple :

$E=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ . Combien y a-t-il de permutations de  $E$  ? Donnez des exemples.

#### Dénombrons les p-uplets :

Les p-uplets sont constitués de p éléments, qui peuvent se répéter et dont l'ordre est important.

*Il y a  $n^p$  p-uplets.*

#### Exemple :

$E=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ . Combien y a-t-il de 4-uplets de  $E$  ? Donnez des exemples.

## Dénombrons les arrangements de p éléments parmi n :

Les arrangements sont des p-uplets d'éléments différents de E et dont l'ordre est important.

Il y a  $\frac{(n)!}{(n-p)!}$  arrangements de p éléments parmi n éléments.

### Exemple :

$E=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ . Combien y a-t-il de d'arrangements de 4 éléments de E ? Donnez des exemples.

## III) Combinaison

Soit E un ensemble tel que  $\text{card}(E)=n$ .

## Dénombrons les combinaisons de p éléments parmi n :

Les combinaisons sont des parties de E, ce ne sont donc pas des p-uplets et l'ordre des éléments n'a aucune importance ici.

Il y a  $\binom{n}{p} = \frac{(n)!}{p!(n-p)!}$  combinaisons p éléments parmi n éléments.

### Exemple :

$E=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ . Combien y a-t-il de de combinaisons de 4 éléments de E ? Donnez des exemples.

## Propriétés

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

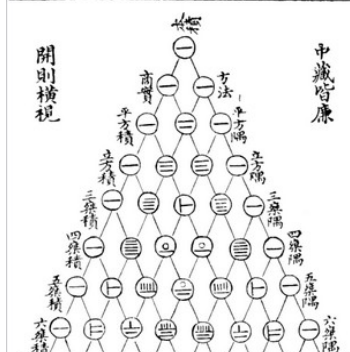
## Formule de Pascal

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Triangle arithmétique de Zhu Shijie. (XIIIème)

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	9	10	5	1

圖方蔡七法古



## IV) Parties d'un ensemble

$E = \{0;1;2;3;4;5;6\}$ .

Combien  $E$  compte-t-il de sous-ensembles (appelés parties de  $E$ ) ?

On sait que : il y a  $\binom{n}{0}$  partie à 0 élément ..... l'ensemble vide  
il y a  $\binom{n}{1}$  partie à 1 élément ..... les singletons  $\{0\}, \{1\}$ , etc  
.  
.  
.  
il y a  $\binom{n}{k}$  partie à  $k$  éléments  
.  
etc

Le nombre de sous-ensembles de  $E$  est donc  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  .

### Propriété

Le nombre de sous-ensembles de  $E$  est :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

### Démonstration

Pour faire une partie de  $E$ , il faut pour chaque élément de  $E$  se demander si on le prend ou non, on a donc deux possibilités pour chaque élément de  $E$ .

Ainsi le nombre de choix est  $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$