Cours : Fonction Exponentielle

I) La fonction exponentielle

Un lemme est un résultat qui va nous servir à la démonstration d'une propriété.

Lemme

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$
alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Considérons la fonction $g(x)=f(x)\times f(-x)$

Nous avons $g'(x)=f'(x)\times f(-x)+f(x)\times[-f'(-x)]=0$

Donc la fonction g est constante et pour tout réel x,
$g(x)=g(0)=f(0)\times f(0)=1$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x)\times f(-x)=1$ *et donc* $f(x)\neq 0$

Propriété :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle, notée exp.

Démonstration :

Existence : L'existence est admise.

Unicité : Soient f et g deux fonctions vérifiant les conditions de la propriété.

La fonction $h=\dfrac{g}{f}$ *est définie (puisque f ne s'annule pas d'après le lemme) et dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Donc $h'=\dfrac{g'\times f-g\times f'}{f^2}=\dfrac{gf-fg}{f^2}=0$ *. La fonction h est constante et comme* $h(0)=1$ *, pour tout réel x,* $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$ *et* $g(x)=f(x)$

II) Calculs avec l'exponentielle

Propriété 1 :

$$\forall\ x, y\in\mathbb{R}, \exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

Démonstration :

Soit un réel y. *On considère la fonction* $h(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

$$h'(x)=\frac{\exp'(x+y)\exp(x)-\exp(x+y)\times\exp'(x)}{(\exp(x))^2}=\frac{\exp(x+y)\exp(x)-\exp(x+y)\times\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0$$

La fonction h est constante et $h(x)=h(0)=\frac{\exp(0+y)}{\exp(0)}=\exp(y)$

Finalement, $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}=\exp(y)$

Propriété 2 :

> La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Démonstration :

La fonction exp ne s'annule pas (lemme de début du chapitre) et de plus

$$\exp(x)=\exp(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=[\exp(\frac{x}{2})]^2>0$$

Propriété 3 :

$$\boxed{\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}}$$

Démonstration :

On considère la fonction $f(x)=\exp(x)\times\exp(-x)$ *pour tout réel x.*

Nous avons $f'(x)=\exp'(x)\times\exp(-x)-\exp(x)\times\exp'(x)=0$ *, la fonction f est constante or* $f(0)=1$ *donc* $f(x)=\exp(x)\times\exp(-x)=1$

Finalement $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$

Propriété 4 :

$$\boxed{\forall\ x, y\in\mathbb{R}, \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}}$$

Démonstration :

On applique la propriété 1 avec x et -y, puis la propriété 3.

Propriété 5 :

$$\boxed{\forall\ x_1, x_2, \ldots x_n\in\mathbb{R}, \exp(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\exp(x_1)\times\exp(x_2)\times\ldots\times\exp(x_n)}$$

Démonstration :

admise (une récurrence sur n, le nombre d'éléments.)

Propriété 6 :

$$\boxed{\forall\ x\in\mathbb{R}, \forall\ n\in\mathbb{Z}, \exp(nx)=[\exp(x)]^n}$$

Démonstration :

n > 0 : C'est la propriété 5 avec $x_1=\ldots=x_n=x$

n = 0 : $\exp(0)=1=[\exp(x)]^0$

III) Des puissances

On note *e* l'image de 1 par la fonction exponentielle : $e=\exp(1)\approx 2{,}71828\ldots$

Pour tout entier relatif *n*, nous avons $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$ donc $\exp(n)=[\exp(1)]^n=e^n$

Par extension, on convient de noter $\exp(x)=e^x$. *La puissance peut être réelle*

On peut dès lors tout simplifier :

$\forall\ x,y\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}$

$$e^{x+y}=e^x\times e^y \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$$

$$e^0=1 \qquad e^x>0$$

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x} \qquad (e^x)^n=e^{nx}$$

Ce sont les règles usuelles de calculs sur des puissances.

IV) Etude de la fonction

Signe de exp :

$$\forall\ x\in\mathbb{R}, e^x>0$$

Démonstration :

$\forall\ x\in\mathbb{R}, e^x=e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}=(e^{\frac{x}{2}})^2\geqslant 0$ et comme la fonction exp ne s'annule pas $\forall\ x\in\mathbb{R}, e^x>0$

Variations de exp :

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration :

La dérivée de exp est elle-même, et comme $\forall\ x\in\mathbb{R}, e^x>0$, sa dérivée est strictement positive donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Conséquence de la monotonie de exp :

$$e^a=e^b\Leftrightarrow a=b \quad \text{et} \quad e^a\geqslant e^b\Leftrightarrow a\geqslant b$$

Dérivée de e^u :

$$(e^u)'=u'\times e^u$$

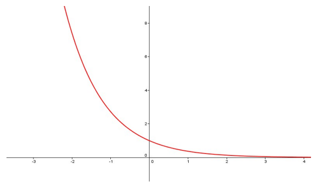
V) Compléments

A) La fonction exponentielle est très utilisée pour modéliser des problèmes :

La fonction exponentielle décrit une croissance très rapide (une population par exemple), parler de croissance exponentielle indique que la croissance est très rapide.

Elle peut aussi décrire une décroissance très rapide

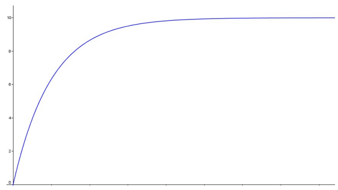
$$f(x)=e^{-x}$$



Elle peut aussi décrire une croissance très rapide suivie d'une stagnation.

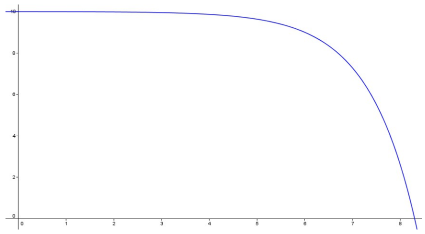
(Charge d'une batterie)

$f(x)=-e^{2,3-x}+10$



Elle peut tout aussi bien décrire la décharge d'une batterie :

$f(x)=-e^{-6+x}+10$



B) Voici deux suites convergentes vers e :

$u_n=(1+\frac{1}{n})^n$ $\qquad$ $v_n=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}$ (avec $n!=1\times2\times3\times....\times n$)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=e$$

C) La fonction exponentielle intervient dans la résolution des équations différentielles :

L'équation différentielle $y'+ay=b$ admet les solutions $y=Ce^{-ax}-\frac{b}{a}$

D) Les fonctions hyperboliques sont définies par $ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

E) L'exponentielle intervient dans les nombres complexes et en probabilité.

F) Sa fonction réciproque est le logarithme népérien (ln) que vous verrez l'année prochaine.