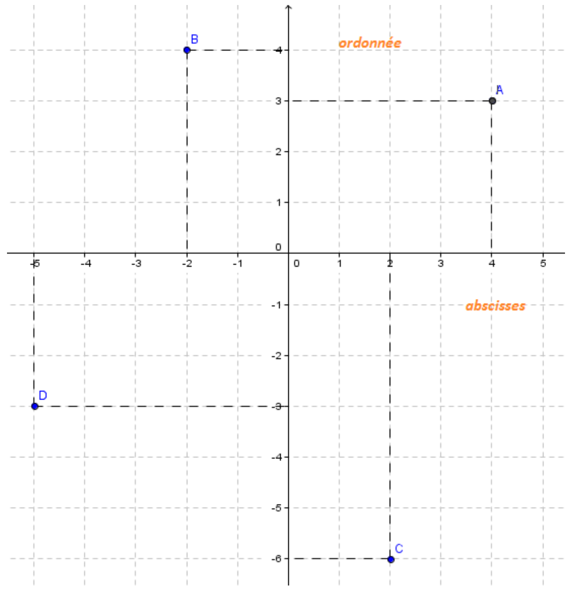
Chapitre 12 : Repérage

René Descartes (1596-1650) propose, dans son ouvrage Géométrie, de résoudre les problèmes de géométrie en utilisant toujours le calcul algébrique. C'est tout l'objectif de ce chapitre.

I) Repère du plan



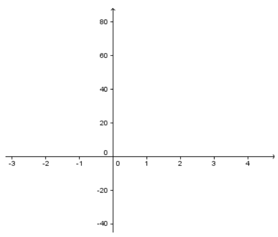
Pour repérer un point sur une surface plane, il nous faut deux axes. Deux axes sécants sont appelés repère. Par convention le premier point sur l'axe des abscisses est noté I, le premier point sur l'axe des ordonnées est noté J.
(O,I,J) est le repère de centre O défini par les points I et J.

Un point est alors repéré par deux nombres appelés les coordonnées : l'abscisse et l'ordonnée.
Exemple : A (4 ; 3) ; B (-2 ; 4) ; C (;   ) ; D (;   )

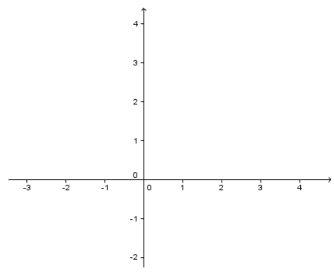
Remarque :

Il y a deux axes, nous sommes en deux dimensions.

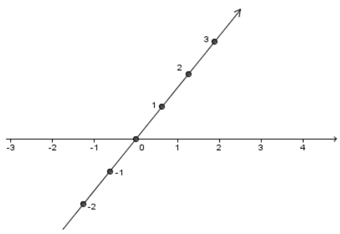
Un repère peut être de trois sortes :



repère orthogonal
les axes sont perpendiculaires



repère orthonormé
les axes sont perpendiculaires et gradués de 1 en 1



repère quelconque
les axes ne sont pas perpendiculaires

Propriété : Le milieu I de deux points A (x_A, y_A) et B(x_B, y_B) a pour coordonnées les moyennes des coordonnées de ces deux points.

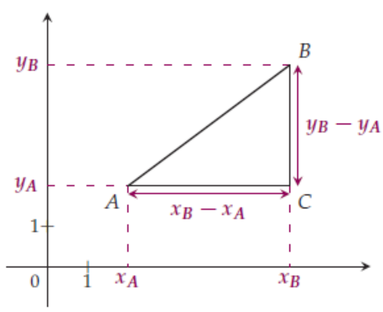
$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

II) Distance

Considérons un repère orthonormé (O,I,J). Soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.
Propriété : La distance AB se calcule grace à la formule suivante.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Démonstration : Posons $C(x_B;y_A)$ et faisons un dessin pour bien comprendre :



Le repère étant orthogonal, le triangle ABC est rectangle en C.
On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

Or $BC=y_B-y_A$ et $AC=x_B-x_A$
Comme le repère est normé, ces deux longueurs sont exprimées dans la même unité et on peut écrire :

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

Une somme de carrés étant toujours positive, on peut calculer la racine carrée :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

fin

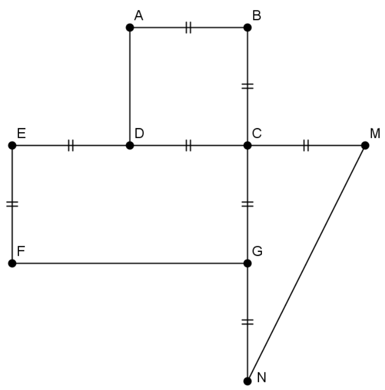
Remarque :

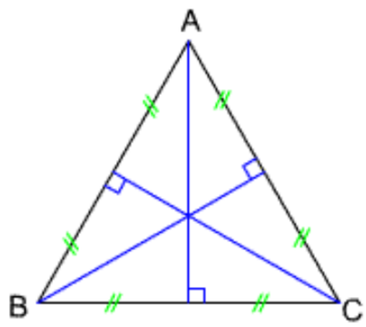
1 - Il est nécessaire que le repère soit orthogonal sinon on ne peut pas appliquer le théorème de Pythagore.

2 - Si le repère n'est pas normé, on peut quand même appliquer le théorème de Pythagore mais il vous faudra convertir les longueurs pour quelles soient dans la même unité.

III) Choix du repère

Vous serez amenés à devoir choisir un repère, il est alors préférable de se servir des points de la figure déjà présents pour simplifier tous les calculs.
On rappelle que on note R(O,A,B) le repère de centre O dans lequel le point A a pour coordonnée (1;0) et B (0;1).





Si l'on se place dans le repère R(D,C,A) :

$D(0;0); C(1;0); A(0;1); E(-1;0)$

$F(\ ;\ ); G(\ ;\ ); M(\ ;\ )$

$N(\ ;\ ); B(\ ;\ )$

Dans le repère R(B,C,A) :

$B(0;0); C(1;0); A(\ ;\ )$

$G(\ ;\ )$

Le choix du repère est important, si les démonstrations ne dépendent pas du choix du repère, leur difficulté en dépend. Attention, le calcul de distance n'est possible que dans un repère orthonormé.

Application :

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(3;8), B(-1;0); C(-5;2)$

1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

2) Déterminez les coordonnées du centre K et le rayon r du cercle circonscrit de ce triangle.