Cours: Distributivité

Travailler avec des lettres permet de démontrer des formules, c'est-à-dire d'établir des résultats dont on est certain qu'ils sont tout le temps vrai.
Par exemple, considérons le résultat "la somme de deux entiers consécutifs est toujours un entier impair".
Je peux le vérifier sur des exemples : 3+4 =**7**, 8+9=**17**, 100+101=**201**, 0+1=**1** où effectivement le résultat est toujours impair. Mais comment être sûr qu'il n'existe pas de contre-exemple, que le résultat est vrai tout le temps. Les grecs ne se satisfaisaitent pas de vérifier un résultat ainsi, il fallait qu'il le démontre pour toutes les valeurs possibles.
Si n est le premier entier, $n+1$ est le second. Donc leur somme est $n+(n+1)=2n+1$ et $2n+1$ est l'écriture d'un nombre impair.

Il a fallu trouver des méthodes pour simplifier les calculs, en particulier en enlevant les parenthèses. Euclide, mathématicien grec du IIIème siècle av JC, démontra plusieurs de ces méthodes.

I) Simplification

Rappel : Pour isoler une partie d'un calcul, on peut utiliser trois symboles différents mais qui ont la même fonction:

- les parenthèses ( )
- les crochets [ ]
- les accolades { }

Ils servent tous à définir des priorités dans un calcul.

Règle 1 :

Les parenthèses autour d'un calcul prioritaire sont inutiles

$$(2\times x)+7=2\times x+7$$

Règle 2 :

Si autour des parenthèses il n'y a ni $\times$ ni $\div$, on peut les simplifier selon le signe qui est devant :

Si elles sont précédées d'un +, on peut les supprimer.

Par exemple : $A=21+(2x-3)+(x+5)=21+2x-3+x+5=3x+23$

Si elles sont précédées d'un –, on peut les supprimer mais il faut changer tous les signes + et – en leur contraire.

Par exemple : $B=21-(2x-3)-[-x\times 8-9]=21-2x+3+x\times 8+9=6x+33$

Astuces : On peut commencer à réduire l'intérieur des parenthèses pour simplifier les calculs.

Si il y a plusieurs parenthèses imbriquées, on enlève celles qui sont le plus à l'intérieur.

$$C=[2+(x-3)]-(7\times x+2\times 3)$$
$$C=[2+x-3]-(7x+6)$$
$$C=2+x-3-7x-6=-6x-7$$

Attention :

Si il y a un $\times$ devant ou derrière les parenthèses, il faudra faire un développement. Vous avez vu le simple en cinquième (que l'on va revoir) et nous allons généraliser ce résultat.

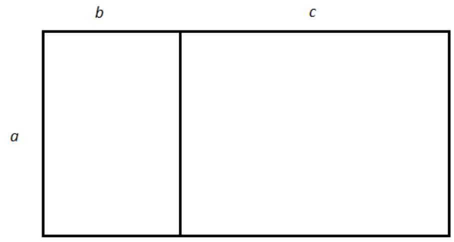
II) Développement

Rappel : $\boxed{a\times(b+c)=a\times b+a\times c}$

Démonstration :

Considérons la figure géométrique suivante :

Le grand rectangle a été coupé en deux rectangles.



Le grand rectangle a pour largeur a et pour longueur (b+c)

Son aire est donc $l\times L=a\times(b+c)$

Les deux petits rectangles ont pour aire $a\times b$ *et* $a\times c$.

Commes l'aire du grand rectangle est égale à l'addition des deux aires des petits rectangles, nous obtenons : $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

Nous avons donc

$$\boxed{\begin{aligned} a(b+c)&=ab+ac \\ a(b-c)&=ab-ac \end{aligned}}$$

N'oubliez pas : $a\times b=ab$

Ce résultat ce généralise :

$$\boxed{(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d=ac+ad+bc+bd}$$

On peut le représenter avec des fléches (chaque flèche représente une multiplication):

$$(x-6)(2x-3)=x\times 2x-x\times 3-6\times 2x+6\times 3=2x^2-3x-12x+18$$

Et si vous avez compris le principe, on peut déveloper tous les produits :

$$(a+b)\times(c+d+e+f)=ac+ad+ae+af+bc+bd+be+bf$$