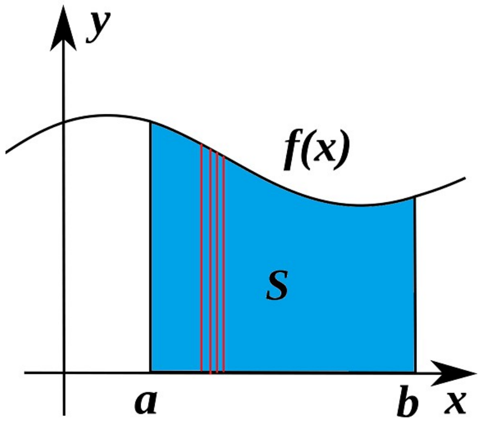
Cours : Intégrale d'une fonction

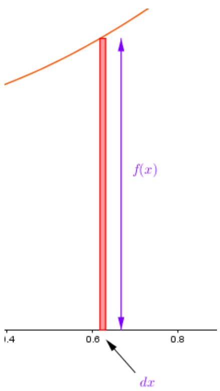
En 1635, Cavalieri (1598-1647), développe la théorie des indivisibles. Pour prouver l'égalité de deux aires, il vérifie l'égalité des lignes constituant les deux surfaces. Mais cette méthode ne permet que de comparer deux surfaces, elle ne permet pas de calculer la valeur d'une surface.



Au XVII ème siècle, Leibniz et Newton jette les bases du calcul intégral. Une surface peut être délimité par la courbe d'une fonction et l'axe des abscisses, il "suffit" alors d'additionner la longueur des lignes composant cette surface. Chaque ligne mesurant f(x), on obtient $S=\int_a^b f(x)$ (le symbole $\int$, un S allongé, était le symbole utilisé pour écrire une somme).

Ils ont alors découvert que le calcul d'une aire est l'opération inverse d'une dérivation.

Mais cela ne convient qu'aux fonctions continues.



Au XIX ème siècle, Riemann définit l'intégrale d'une manière plus générale, en reprenant l'idée de départ, additionner la longueur des lignes composant une surface. Mais remarquant que la surface d'une ligne est nulle (donc calculer la somme n'est pas simple), il approchera cette surface par des rectangles de largeur dx (un petit x) et de hauteur f(x).

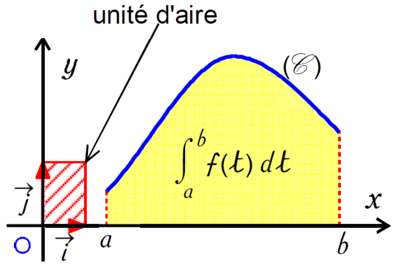
L'aire de ces rectangles est donc $f(x)\times dx$ et la somme $S=\int_a^b f(x)dx$.

I) Intégrale d'une fonction continue et positive

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [a,b].

Définition : L'intégrale de *f* entre a et b est l'aire, en unités d'aire située entre la courbe de *f* , l'axe des abscisses et les droites x=a et x=b.

On note $\int_a^b f(x)dx$.



Remarques :

- *x* est appelée variable muette, (comme une variable de fonction) et on peut la remplacer :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(t)dt=etc\ldots$$

- a et b sont les bornes de l'intégrale

Propriétés :

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

Relation de Chasles avec $b\in[a,c]$

Démonstration :

1) La surface d'un segment est nulle.

2) Additivité des aires

Théorème fondamental :

La fonction $F: x\to\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur [a,b] et a pour dérivée *f*.

Démonstration dans le cas où f est croissante :

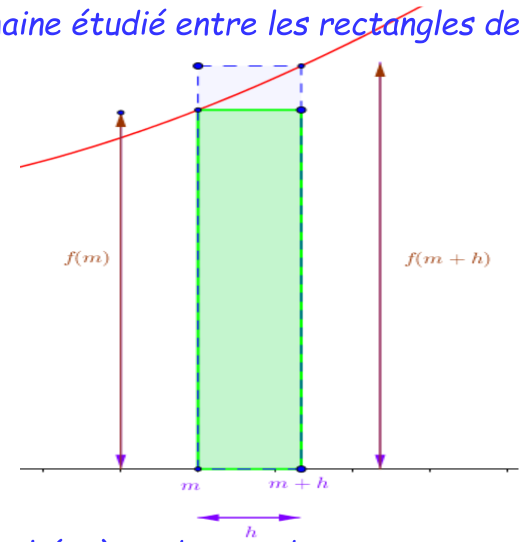
Soit un réel m de [a,b] et h un réel non nul tel que m+h $\in[a,b]$.

1er cas h>0:

On utilise la relation de Chasles : $\int_a^{m+h} f(x)\,dx=\int_a^m f(x)\,dx+\int_m^{m+h} f(x)\,dx$

et donc $\int_a^{m+h} f(x)\,dx-\int_a^m f(x)\,dx=\int_m^{m+h} f(x)\,dx$ *i.e.* $F(m+h)-F(m)=\int_m^{m+h} f(x)\,dx$

La fonction f est croissante donc on peut encadrer le domaine étudié entre les rectangles de longueur f(m) et f(m+h) (voir figure ci-contre)



$$h\times f(m)\leqslant\int_m^{m+h} f(x)\,dx\leqslant h\times f(m+h)$$

D'où :

$$h\times f(m)\leqslant F(m+h)-F(m)\leqslant h\times f(m+h)$$

$$f(m)\leqslant\frac{F(m+h)-F(m)}{h}\leqslant f(m+h)$$

f est continue donc $\lim_{h\to0} f(m+h)=f(m)$ *et en appliquant le théorème des gendarmes :*

$$\lim_{h\to0}\frac{F(m+h)-F(m)}{h}=f(m)$$

F est donc dérivable en m et F'(m)=f(m)

Finalement F est dérivable pour tout réel m de [a,b], F est dérivable sur [a,b] et F'(x)=f(x)

2nd cas h<0:

On démontre cette formule de la même manière (attention à la division par h<0)

II) Généralisation

Le théorème fondamental liant primitive et intégrale permet de calculer une intégrale et de généraliser la définition de l'intégrale aux fonctions changeant de signe.

Propriété :

Si *f* est une fonction continue et positive sur [a,b] et F une primitive de *f* sur [a,b] alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Démonstration :

Nous avons vu que la fonction $G : x \to \int_a^x f(t)\,dt$ *est une primitive de f, donc il existe un réel k tel que* $F(x) + k = G(x)$

Or $G(a) = 0 = F(a) + k$ *donc* $-F(a) = k$ *et* $G(x) = F(x) - F(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) = F(b) - F(a)$$

Nouvelle définition :

Soit une fonction continue de signe quelconque sur [a,b], l'intégrale de a à b de *f* est

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Conséquence :

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Application :

L'intégrale d'une fonction négative de a à b est l'opposé de la surface du domaine délimité par la courbe, l'axe (Ox), et les droites x=a et x=b. On pourrait parler d'aire algébrique en admettant qu'une surface puisse être négative si elle se situe sous l'axe des abscisses.

L'intégrale d'une fonction est donc obtenue en ajoutant la surface des morceaux au-dessus de (Ox) et en enlevant la surface des morceaux en-dessous de (Ox).

III) Calcul intégral

Méthode :

On cherche une primitive de la fonction *f* (en fait on prendra toujours la primitive sans constante) et on calcule F(b)-F(a).

Il est important d'écrire quelle est la primitive (pour la compréhension de votre calcul).

$$\int_0^5 (3x^2-6x+1)\,dx=[x^3-3x^2+x]_0^5=(5^3-3\times 5^2+5)-(0^3-3\times 0^2+0)=55$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(3x)\,dx=\left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{3}\left(\sin(3\times\pi)-\sin\left(3\times-\frac{\pi}{2}\right)\right)=0+1=1$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soient a, b et c des réels de I tels que $a < b < c$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

Démonstration : *Ces propriétés se démontrent en utilisant la formule* $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

Propriété :
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soient a, b des réels de I tels que $a < b$.

1) Si f est positive sur I alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

2) Si pour tout réel x, $f(x)\leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :

Si f est positive sur [a,b] alors F est croissante sur [a,b] et comme $a\leqslant b$ *on a* $F(a)\leqslant F(b)$ *i.e.* $0\leqslant F(b)-F(a)$

La deuxième se déduit de la première en considérant la fonction g(x)-f(x).

Remarque :

La deuxième propriété est très utile car nous serons vite confronté à des fonctions dont on ne sait pas trouver des primitives (donc nous ne saurons pas calculer l'intégrale de manière exacte). Nous pourrons alors essayer d'encadrer la fonction par des fonctions plus simples pour déterminer un encadrement de l'intégrale.

IV) Intégration par parties

Utilisée lorsqu'on ne trouve pas de primitives directemen.

Théorème d'intégration par parties :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur [a,b] alors

$$\boxed{\int_a^b u'v\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b uv'\,dx}$$

Démonstration :

$$[uv]_a^b=\int_a^b (uv)'\,dx=\int_a^b (u'v+uv')\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b uv'\,dx$$

Et donc :

$$\int_a^b u'v\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b uv'\,dx$$

Par exemple, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Posons $u'=\cos x$ et $v=x$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\times\sin 0-[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0=\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}57$$

Exercices :

Calculer : $\int_0^{\pi} t\sin t\,dt$, $\int_{-2}^{2} t e^t\,dt$

V) Utilisation

1) Calculer une aire, attention l'intégrale renvoie une valeur négative si la fonction est négative, à vous de changer le signe.

Attention également aux fonctions changeant de signe, il faut alors calculer l'intégrale des parties positives séparemment des parties négatives.

2) Moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b].

Définition : On appelle valeur moyenne de f le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

3) Pour déterminer les coefficients des séries de Fourier, calculer des volumes, en probabilité (cf plus tard cette année), calculer la longueur d'une courbe...

VI) Pour aller plus loin

Si on ne connaît pas la primitive, on est vite bloqué dans le calcul. Il existe de nombreuses méthodes permettant de se débloquer. En voici deux, ces méthodes sont hors programme.

1) Changement de variable

Sans préciser les conditions d'utilisation, ce n'est pas le but de ce cours :

$$\int_a^b f(u(x))\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx$$

Par exemple, $\int_0^3 t\sqrt{t}\,dt$.

On remarque cependant que si $u=\sqrt{t}$ alors $u^2=t$. Donc $2u\,du=dt$ (avec du=u')
Calculons les bornes de l'intégrale $u(0)=\sqrt{0}=0$ et $u(3)=\sqrt{3}$

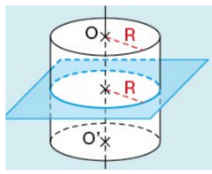
$$\int_0^3 t\sqrt{t}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}} u^2\times u\times 2u\,du=\int_0^{\sqrt{3}} 2u^4\,du=[\frac{2u^5}{5}]_0^{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}^5}{5}-\frac{2\times 0}{5}\approx 6{,}2$$

2) Calcul de volume

L'intégrale permet de calculer une aire (on a décomposé une surface en segments de longueur f(x)) mais on peut également s'en servir pour calculer des volumes. $V=\int S(t)\,dt$ où S(t) est une surface.

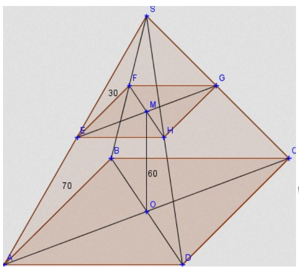
Exemple :

1)



Soit un cylindre de hauteur h, c'est un empilement de disques tous identiques de surface πr^2 , son volume est donc $\int_0^h \pi r^2 dt=\pi r^2 h$

2)



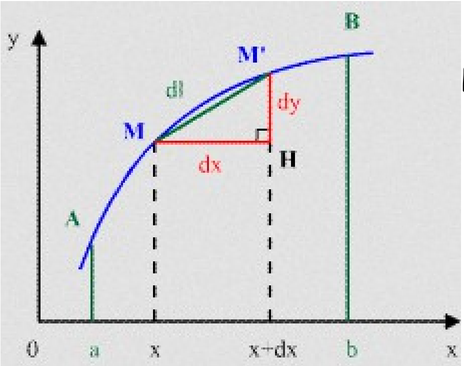
Soit une pyramide carrée dont l'aire de la base est notée B et sa hauteur h.

Cette pyramide est la somme des carrés obtenus par section avec un plan parallèle à la base, tel que celui représenté sur la figure.

En utilisant Thalés, on montre que, pour t fixant la hauteur de la petite pyramide, l'aire de ce petit carré est $a=B\times(\frac{t}{h})^2$ donc le volume de la pyramide est $\int_0^h B\times(\frac{t}{h})^2\,dt=[\frac{Bt^3}{3h^2}]_0^h=\frac{Bh}{3}$

3) Longueur d'une courbe

On peut, grace à l'intégrale, déterminer la valeur exacte de la longueur d'une courbe.



Prenons une longueur élémentaire dl (la longueur cherchée est la somme de ces dl.

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$dl=dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

$$dl=dx\sqrt{1+y'^2}$$

La longueur de la courbe d'une fonction f entre a et b est donc donnée par la formule :

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$$

Considérons maintenant un câble flexible et homogène, accroché à ses deux extrémités en deux points A et B. A l'équilibre, ce câble prend la forme d'une courbe, appelée chaînette, dont l'équation, dans un repère bien choisi, est de la forme y = f(x) avec :

$$f(x)=\frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}) \qquad \text{où } -d < x < d \text{ avec } c \text{ et } d \text{ réels}$$

Déterminer la longueur du câble en fonction de c et d.