Cours : Variable aléatoire

I) Variable aléatoire

Définition :
On considère une expérience aléatoire et on note E l'ensemble des issues.
Une variable aléatoire est une fonction définie sur E et qui, à chaque issue de E, associe un nombre réel.

Remarque : Il existe plusieurs sortes de variables aléatoires, celles que nous étudions en première sont appelées "variables aléatoires discrètes".

Notation : Une variable aléatoire est généralement notée X,Y ou Z.
Si *a* est un réel, l'événement "X prend la valeur *a*" est noté (X=*a*).

A quoi cela sert-il ?
Ce concept a été introduit en associant des gains au résultat des jeux (de casinos pas ex.)
L'idée étant de déterminer si un jeu est équitable, favorable ou défavorable.

Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est un tableau dans lequel on associe à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $(X=x_i)$

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_k
$P(X=x_i)$	p_1	p_2		p_k

II) Paramètres

Espérance :
L'espérance correspond à la moyenne des gains, c'est le gain que l'on peut espérer obtenir en moyenne.
L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$\boxed{E(X)=p_1x_1+p_2x_2+...+p_kx_k}$$

Un jeu est dit équitable si $E(X)=0$

Variance :
La variance mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance.
La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $V(X)$, défini par :

$$\boxed{V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+...+p_k(x_k-E(X))^2}$$

Ecart-type :

L'écart-type mesure également la dispersion mais est dans la même unité que l'espérance et les x_i .

L'écart-type de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$

Propriété :

Soient deux nombres réels *a* et *b*.

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$
$$V(aX)=a^2V(X)$$

Démonstration : $E(aX+b)=p_1(a\,x_1+b)+p_2(a\,x_2+b)+...+p_k(a\,x_k+b)$

$$=a(p_1x_1+p_2x_2+...\,p_kx_k)+b(p_1+p_2+...\,p_k)$$

$$=aE(X)+b \qquad \textit{car} \quad p_1+p_2+...\,p_k=1$$

$$V(X)=p_1(a\,x_1-E(a\,X))^2+p_2(a\,x_2-E(a\,X))^2+...+p_k(a\,x_k-E(a\,X))^2$$

$$=p_1(a\,x_1-a\,E(X))^2+p_2(a\,x_2-a\,E(X))^2+...+p_k(a\,x_k-a\,E(X))^2$$

$$=a^2\,p_1(x_1-E(X))^2+a^2\,p_2(x_2-E(X))^2+...+a^2\,p_k(x_k-E(X))^2$$

$$=a^2V(X)$$

III) Python

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-8	15
$p(X=x_i)$	0,58	0,42

Ecrire un programme simulant X.
Ecrire une fonction calculant l'espérance.