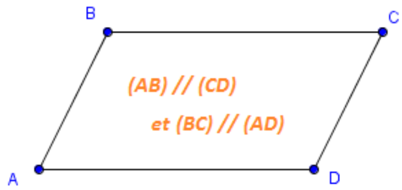
Cours: Parallélogramme

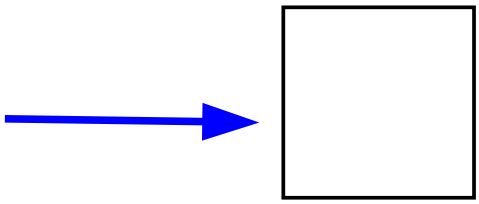
Les mathématiciens adorent nommer et classer les objets qu'ils découvrent.
Les nombres par exemple se rangent dans différentes catégories (les entiers, les décimaux, les relatifs, ...)
Dès l'antiquité, les mathématiciens (Euclide par exemple) se sont efforcés de classer les figures géométriques. Vous connaissez déjà certaines de ces catégories : les triangles, les triangles isocèles, ..., les carrés, les quadrilatères, ...
En voici une nouvelle.

I) Une nouvelle figure

Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



Est-ce que ça c'est un parallélogramme ?



Remarque : On connaît déjà trois parallélogrammes particuliers : les carrés, les losanges et les rectangles.

Tous ce que nous allons dire sur les parallélogrammes sera donc vrai pour les carrés, les losanges et les rectangles.

II) Propriétés caractéristiques

Propriétés : *A apprendre par coeur mot pour mot*

1) Si c'est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

2) Si c'est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont de même longueur.

Remarque : Les propriétés 1 et 2 sont valables pour les carrés, les rectangles et les losanges.

Démonstration : vue en cours

Est-ce que ces propriétés peuvent marcher dans l'autre sens ?

Ce n'est pas automatique, pour celles-ci oui mais il faudra le démontrer.

Propriétés : *A apprendre par coeur mot pour mot*

3) Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

4) Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Démonstration : vue en cours

III) Rectangle, carré et losange

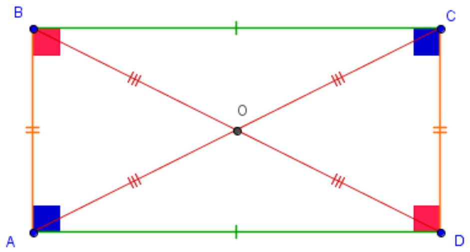
Définition : Un rectangle est un parallélogramme avec un angle droit.

Un losange est un parallélogramme qui a ses 4 côtés égaux.

Un carré est un parallélogramme qui est à la fois un rectangle et un losange.

Propriété 5:

Dans un rectangle, les diagonales sont égales.

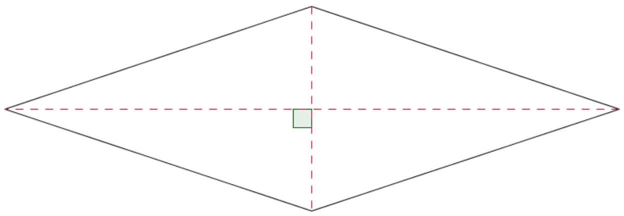


Démonstration : admise

Propriété 6:

Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires.

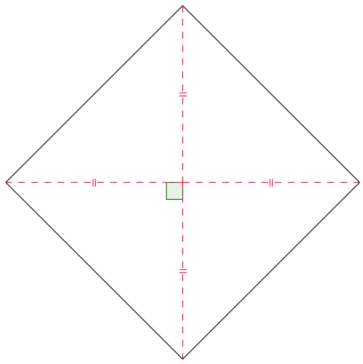
Démonstration : admise



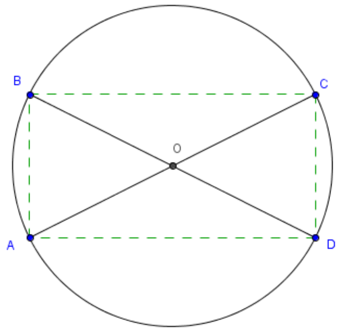
Propriété 7 :

> Dans un carré, les diagonales sont égales et perpendiculaires.

Démonstration : admise



Application :



Sur un cercle de centre O, on place deux points A et B.
On place, C et D, leur symétrique par rapport à O. [AC] et [BD] sont donc des diamètres du cercle.

Quel est la nature du quadrilatère ABCD ?
La nature d'une figure, c'est le nom que l'on peut lui donner : carré, rectangle, triangle isocèle, etc...

Données : [AC] et [BD] sont des diamètres du cercle et O est le centre du cercle, c'est donc le milieu de [AC] et de [BD].
Les diagonales se coupent donc en leur milieu.

Propriété : Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

Conclusion : ABCD est donc un parallélogramme.

Est-ce que c'est un parallélogramme particulier? ABCD a l'air d'un rectangle, démontrons-le.

Données : [AC] et [BD] sont des diamètres du cercle donc AC = BD

Propriété : Si un parallélogramme a ses diagonales égales alors c'est un rectangle.

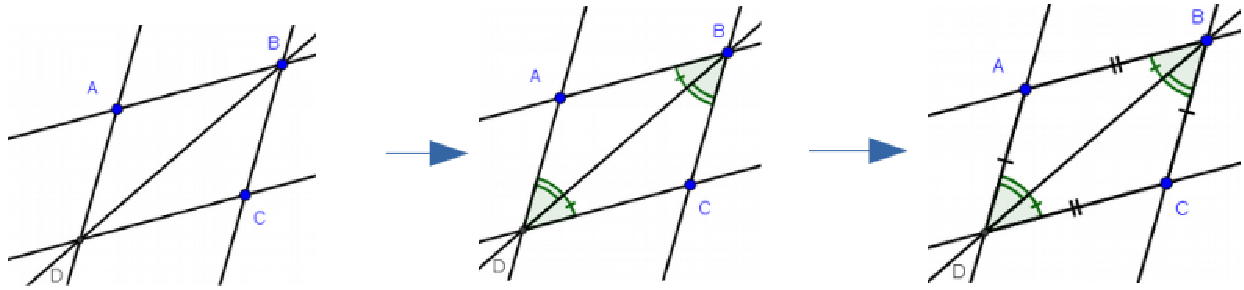
Conclusion : ABCD est un rectangle

P1) On trace une diagonale.

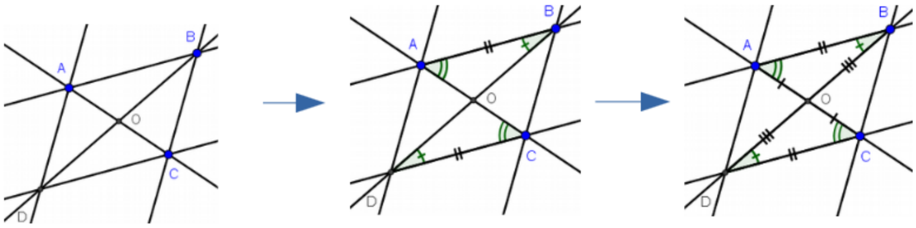
Puisque les droites sont parallèles, les angles alternes-internes sont égaux.

Les triangles ABD et BCD sont donc égaux car ils ont un côté en commun et deux angles égaux. (Nous avons vu qu'un côté et deux angles suffisent pour construire un triangle.)

Puisque les triangles sont "tournés", on a AB = CD et AD = BC



Avec le même raisonnement, on montre que les triangles ABO et CDO sont égaux.



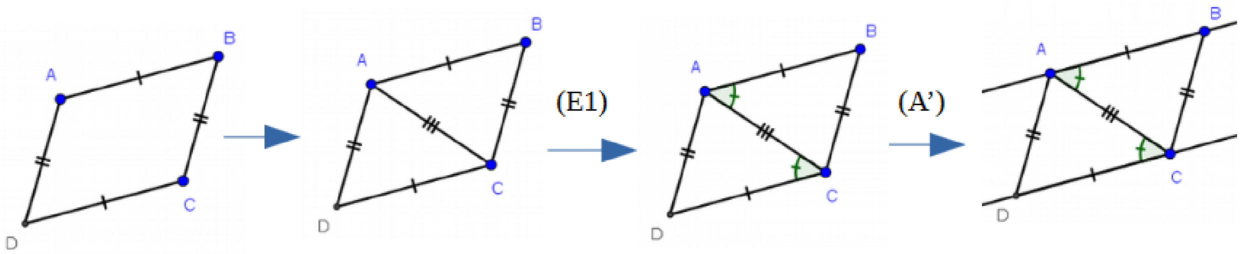
Et donc que O est le milieu des diagonales.

P2) O est donc le centre de symétrie du parallélogramme :

[AB] et [CD] sont symétriques par rapport à O donc AB = CD.

[AD] et [BC] sont symétriques par rapport à O donc AD = BC.

P4)



P5) médiatrice sont des axes de symétries, leur intersection O est le milieu des diagonales (on fait deux fois une symétrie axiale sur AO pour retomber sur OC et comme deux sym axiales est une symétrie centrale, A,O,C alignés)

P6) la diagonale est la médiatrice du triangle isocèle