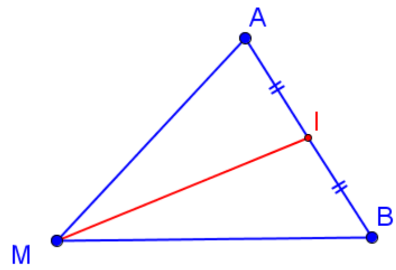
Cours : Application du Produit scalaire

Nous allons voir une série de théorème qui se démontrent à l'aide du produit scalaire. Si vous ne regardez pas les démonstrations, vous ne verrez même pas le produit scalaire. Ceci dit les démonstrations sont à connaître.

I) Géométrie

Théorème de la médiane :



Soit A et B deux points et I le milieu de [AB].

Pour tout point M, $MA^2+MB^2=2\mathrm{MI}^2+\frac{1}{2}AB^2$

Démonstration :

$$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$

$$=\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$$

$$=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$$

Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$ *et* $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

$$=2\overrightarrow{MI}^2+2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2$$

$$=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

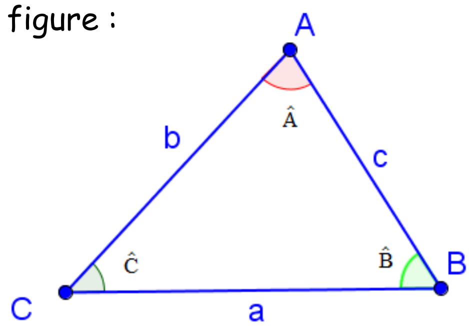
Théorème d'Al-Kashi :

Dans un triangle ABC et en utilisant les notations de la figure :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$



Démonstration :

$$a^2=BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=b^2-2AC\times AB\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})+c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2=b^2-2AC\times AB\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})+c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})$$

II) Trigonométrie

Soient a et b deux réels.

Formules d'addition

$$\cos(a+b)=\cos a\times\cos b-\sin a\times\sin b \qquad \sin(a+b)=\sin a\times\cos b+\sin b\times\cos a$$

$$\cos(a-b)=\cos a\times\cos b+\sin a\times\sin b \qquad \sin(a-b)=\sin a\times\cos b-\sin b\times\cos a$$

Démonstration :

1) Soit O le centre du cercle trigonométrique et $(O,\vec{i},\vec{j})$ *un repère orthonormé.*
Soient A et B les points de ce cerlce repérés par les angles a et b. Nous avons donc les coordonnées de ces deux points : $A\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ *et* $B\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

Donc $\vec{OA}.\vec{OB}=\cos a\cos b+\sin a\, sinb$

Or on a aussi, $\vec{OA}.\vec{OB}=OA\times OB\times\cos(\vec{OA},\vec{OB})=\cos(\vec{OA},\vec{OB})$ *car le rayon du cercle vaut 1.*

Et comme $(\vec{OA},\vec{OB})=(\vec{OA},\vec{i})+(\vec{i},\vec{OB})=-(\vec{i},\vec{OA})+(\vec{i},\vec{OB})=b-a$

Donc $\vec{OA}.\vec{OB}=\cos(\vec{OA},\vec{OB})=\cos(b-a)=\cos(a-b)$

Finalement, $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\, sinb$

2) En remplaçant b par -b dans la formule précédente,

$$\cos(a+b)=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

3) $\sin(a-b)=\cos(\frac{\pi}{2}-(a-b))=\cos((\frac{\pi}{2}-a)+b)$

$$=\cos(\frac{\pi}{2}-a)\cos b-\sin(\frac{\pi}{2}-a)\sin b$$

$$=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

4) En remplaçant b par -b dans la formule précédente,

$$\sin(a+b)=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

Formules de duplication

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1$$

$$\sin(2a)=2\sin a\times\cos a$$

Démonstration :

On applique les formules précédentes avec b = a et on utilise l'égalité :
$cos^2 x+sin^2 x=1$