

Somme de variables aléatoires

Rappel

Espérance :

L'espérance correspond à la moyenne des valeurs, c'est la valeur que l'on peut espérer obtenir en moyenne :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k$$

Un jeu est dit équitable si $E(X) = 0$

Variance :

La variance mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance.

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_k(x_k - E(X))^2$$

Ecart-type :

L'écart-type mesure également la dispersion mais est dans la même unité que l'espérance et les x_i :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

I) Somme de variables aléatoires

On considère deux jeux indépendants dont les gains sont décrits par les variables aléatoires X et Y ci-dessous :

x_i	-10	5	20
p_i	0.2	0.5	0.3

y_i	-2	8	15
p_i	0.4	0.4	0.2

Quels sont les gains possibles ? Quelle est l'espérance de gain si je joue aux deux jeux successivement ?

Propriétés de l'espérance :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

Propriétés de la variance:

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

seulement si X et Y sont indépendantes

Démonstration : Nous admettrons ces propriétés

Quel intérêt ?

On peut transformer les valeurs de X pour simplifier les calculs de l'espérance.

II) Application à la loi binomiale

Définition : Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

Propriétés de l'espérance/variance :

Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon de la loi X

$$\begin{aligned} E(X_1 + \dots + X_n) &= n E(X) \\ V(X_1 + \dots + X_n) &= n V(X) \end{aligned}$$

Démonstration : Nous admettrons ces propriétés

Application

Soit $X \sim \text{Bin}(n, p)$, alors en considérant la variable Y suivant la loi de Bernoulli $Y \sim B(p)$ on peut construire un n -échantillon Y_1, \dots, Y_n de Y .

On a alors $X = Y_1 + \dots + Y_n$ et donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ V(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

Démonstration : On calcule l'espérance et la variance de la variable Y et on applique la propriété de l'espérance/variance.