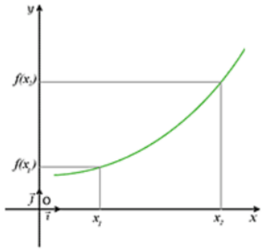
Chapitre 14 : Variation de fonction

I) Vocabulaire

Définition : 1) Dire qu'une fonction est croissante sur un intervalle I signifie que lorsque la variable augmente, l'image augmente.

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{, si } x_1 \leq x_2 \text{ alors } f(x_1) \leq f(x_2)$$

La courbe de f va "monter" lorsqu'on la parcourt de la gauche vers la droite.
On dit que la fonction f conserve l'ordre ;
les images de deux nombres sont rangés dans le même ordre.

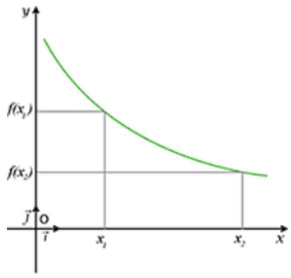


Fonction croissante

2) Dire qu'une fonction est décroissante sur un intervalle I signifie que lorsque la variable augmente, l'image diminue.

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{, si } x_1 \leq x_2 \text{ alors } f(x_1) \geq f(x_2)$$

La courbe de f va "descendre" lorsqu'on la parcourt de la gauche vers la droite.
On dit que la fonction f change l'ordre ;
les images de deux nombres sont rangés dans l'ordre contraire.

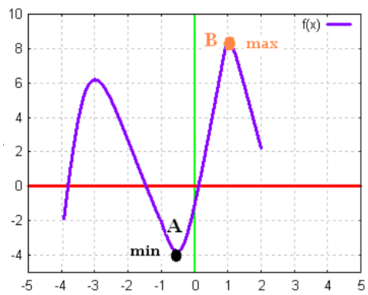


Fonction décroissante

Définition : On dit qu'une fonction est **monotone** sur un intervalle lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle.

On dit qu'une fonction est **constante** sur un intervalle si pour tous nombres *a* et *b* de cet intervalle on a $f(a) = f(b)$.

3) Les extremums d'une fonction sur un intervalle I sont, s'ils existent, la plus grande valeur (**maximum**) et la plus petite(**minimum**) image atteinte par la fonction sur cet intervalle.



Si *f(b)* est le maximum de la fonction *f* sur l'intervalle I,
alors , pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq f(b)$

Si *f(a)* est le minimum de la fonction *f* sur l'intervalle I,
alors , pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq f(a)$

II) Tableau de variation

On peut "résumer" l'allure d'une fonction en ne gardant que ses variations. Pour ce faire, on dressera un tableau de variation.

Il est composé de deux lignes ; une ligne pour les antécédents et une ligne pour les images.
Les variations de la fonction seront indiqués dans la deuxième ligne par des flêches (une flêche qui monte indique que la fonction est croissante, etc...)

Voici un exemple :

x	-3		-1		1		$+3$
$f(x)$	$-0,3$	↘	$-0,5$	↗	$0,5$	↘	$0,3$

Sur la première ligne, on peut lire l'ensemble de définition de la fonction : $D_f=[-3\,;3]$

-1 et 1 sont les valeurs pour lesquelles les variations de la fonction changent : à $x=-1$ on a un creux, à $x=1$ on a un sommet.

Sur la deuxième ligne, on lit les variations de la fonction :

f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$

f est décroissante sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[1\,;3]$

Les nombres indiqués aux extrémités des flèches sont les images des nombres de la première ligne ; ce sont les hauteurs atteinte par la fonction aux débuts et aux arrivées des flèches.

Application

En utilisant ce tableau, comparez les nombres suivants :

f(0) et f(0,5)

0 et 0,5 appartiennent à l'intervalle $[-1\,;1]$;
or la fonction *f* est croissante sur cet intervalle.

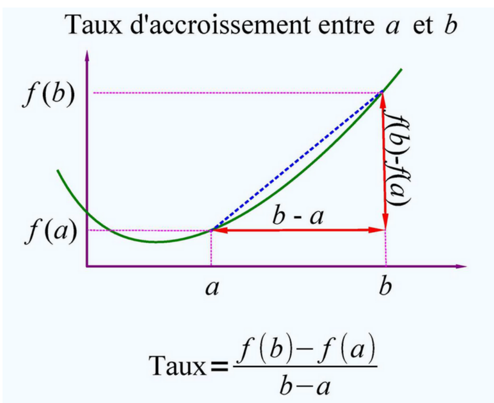
Elle conserve donc l'ordre : $0<0,5$ donc $f(0)<f(0,5)$

f(0) et f(2)

0 appartient à l'intervalle $[-1\,;1]$; son image appartient à $[-0,5\,;0,5]$
2 appartient à l'intervalle $[1\,;3]$; son image appartient à $[0,3\,;0,5]$
On ne peut pas savoir quel est le plus grand ;
en effet peut-être que *f(0)=0,4* et *f(2)=0,35,* on aurait alors $f(0)>f(2)$;
ou bien peut-être que *f(0)=-0,2* et *f(2)=0,4,* on aurait alors $f(0)<f(2)$

III) Fonctions affines

Définition : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.
Pour tous réel x_1 et x_2 distincts de I, on appelle **taux d'accroissement** de *f* entre x_1 et x_2 le quotient : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.



Soit une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\boldsymbol{a}x+b$.

Propriété :

Pour tous réel x_1 et x_2 distincts de $\mathbb{R}$, le taux d'accroissement de *f* entre x_1 et x_2 est égal à *a*..

Tableau de variations :

Les variations de f ne dépendent que du signe de *a.*

Si $a < 0$ alors *f* est décroissante ; si $a > 0$ alors *f* est croissante.

Démonstration : vue en cours

$si\ a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$		$\nearrow$

$si\ a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$	$\searrow$	

IV) Fonctions de référence

Théorème

La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-=]-\infty;0]$

Démonstration :

Soit deux réels a < b. On cherche à comparer a² et b².

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ *or a < b donc a-b <0.*

Si a et b sont strictement positif, alors a+b > 0 et $a^2-b^2<0$ *donc* $a^2<b^2$ *c'est-à-dire que la fonction carrée est strictement croissante sur* $[0;+\infty[$

Si a et b sont strictement négatif alors a+b < 0 et $a^2-b^2>0$ *donc* $a^2>b^2$ *c'est-à-dire que la fonction carrée est strictement décroissante sur* $]-\infty;0]$

Propriété :

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$.
La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Attention, la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$ car ce n'est pas un intervalle.

Démonstration :

Sur $]-\infty;0[$ *:*

Soit $a<b<0$

$\frac{a}{b}>\frac{b}{b}$ *On change de sens car on divise par un nombre négatif*

$\frac{a}{b}>1$

$\frac{a}{ab}<\frac{1}{a}$ *On change de sens car on divise par un nombre négatif*

$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

Finalement, $a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ *ceci est la définition d'une fonction décroissante sur* $]-\infty;0[$.

La démonstration se fait de façon similaire sur $]0;+\infty[$.

Théorème

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+ = [\,0\,;+\infty\,[$.

Démonstration :

Soit deux réels a et b tels que 0 < a < b. On veut comparer $\sqrt{a}$ *et* $\sqrt{b}$ *.*

$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ *or* $a<b \Leftrightarrow b-a>0$

donc $\sqrt{b}-\sqrt{a}=\dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}>0$ *et* $\sqrt{b}>\sqrt{a}$ *.*

Finalement $\forall\, 0<a<b\,,\sqrt{a}<\sqrt{b}$ *, la fonction racine carrée est croissante sur* $\mathbb{R}^+$