Chapitre 15 : Droites du plan

On munit le plan d'un repère.

I) Vecteur directeur

Définition : Soit une droite *(d)* et deux points distincts A et B de *(d)*.
On appelle **vecteur directeur** de *(d)* tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

On dit que le vecteur directeur dirige la droite *(d)*.

Conséquence :
Si deux droites sont parallèles, tout vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre..
Pour montrer que deux droites sont parallèles, il suffit de prendre un vecteur directeur de chacune d'entre elles et de montrer qu'ils sont colinéaires.

Propriété :
Une droite peut être définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.

$$\boxed{M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}}$$

II) Equation cartésienne

Propriété : Pour toute droite, il existe trois réels *a,b,c* tels que pour n'importe quel point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de *(d)* , ses coordonnées vérifient l'**équation cartésienne** $\boxed{ax+by+c=0}$

Démonstration : Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ *un point de (d) et* $\vec{u}$ *un vecteur directeur de (d).*

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} et\, \vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} sont\, colinéaires$$

$$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)\times y_{\vec{u}}-(y-y_A)\times x_{\vec{u}}=0$$

$$\Leftrightarrow y_{\vec{u}}\times \boldsymbol{x}+(-x_{\vec{u}})\times \boldsymbol{y}+(y_A x_{\vec{u}}-x_a y_{\vec{u}})=0$$

Il suffit alors de poser $a=y_{\vec{u}}$ *,* $b=-x_{\vec{u}}$ *et* $c=y_A x_{\vec{u}}-x_a y_{\vec{u}}$ *.*

Remarque : L'équation cartésienne n'est pas unique, en fait une droite possède une infinité d'équation cartésienne, toutes multiples l'une de l'autre.
Ainsi $2x-3y+2=0$ décrit la même droite que $4x-6y+4=0$ et que $0{,}2x-0{,}3y+0{,}2=0$

Propriété :
Soit la droite *(d)* d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$

$$\boxed{\text{Le vecteur } \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ est \textbf{un} vecteur directeur de } (d).}$$

Démonstration : En reprenant la démonstration précédente, on trouvait à la fin $a=y_{\vec{u}}$ *,* $b=-x_{\vec{u}}$ *ce qui est équivalent à* $a=y_{\vec{u}}$ *,* $x_{\vec{u}}=-b$

Propriété :

Deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$

Démonstration : $(d)//(d') \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} et\, \vec{u}'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ *sont colinéaires*

$$\Leftrightarrow det(\vec{u},\vec{u}')=0$$

$$\Leftrightarrow -b\times a'-a\times(-b')=0$$

III) Equation réduite

On peut distinguer trois types de droites et, selon le type, on peut simplifier l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ en une équation réduite. On rappelle que *a* et *b* ne peuvent pas être nuls simultanément.

1er cas : a = 0

On a ici $by+c=0$ donc $y=-\frac{c}{b}$ car $b\neq 0$.

Les droites horizontales ont une équation réduite de la forme $y=k$

Elles sont parallèles à l'axe des abscisses.

2nd cas : b = 0

On a ici $ax+c=0$ donc $x=-\frac{c}{a}$ car $a\neq 0$.

Les droites verticales ont une équation réduite de la forme $x=k$

Elles sont parallèles à l'axe des ordonnées.

3ème cas : a et b non nuls

On a ici $ax+by+c=0$ donc $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ car $b\neq 0$

Les droites non verticales admettent toutes une équation réduite de la forme $y=mx+p$

Remarque : - On retrouve l'équation d'une fonction affine. On dit que la droite d'équation y=m x+p est la réprésentation graphique de la fonction affine $f(x)=mx+p$.
- Ici, m et p sont uniques.

Propriété :

Soit A et B deux points distincts d'une droite d'équation réduite $y=mx+p$.

Le **coefficient directeur** *m* de la droite (AB) se calcule ainsi : $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Remarque : - Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

IV) Systèmes d'équations

Exemple : $\begin{cases} 2x+3y=30 \\ x-y=5 \end{cases}$ *Voici un système de deux équations à deux inconnues.*

On cherche les couples de points (x,y) qui vérifient ces deux équations simultanément.

On remarque que la première équation peut s'écrire $2x+3y-30=0$, c'est l'équation cartésienne d'une droite.
On fait la même remarque pour la seconde équation.
On cherche donc les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui appartiennent aux deux droites en même temps. Il y a lors trois cas :

les droites sont confondues :
Cela signifie que les deux équations sont proportionnelles, dans ce cas il y a une infinité de solutions (tous les points de la droite sont solutions)

les droites sont parallèles, distinctes :
Cela signifie que les deux équations ne sont pas proportionnelles mais que les vecteurs directeurs sont colinéaires donc si $ab'-a'b=0$. Dans ce cas, il n'y aucune solution.

les droites sont sécantes :
Cela se produit lorsque $ab'-a'b\neq 0$. Dans ce cas, il y a un unique point d'intersection donc une unique solution.
Pour la trouver, il y a deux méthodes :

Par substitution

$$\begin{cases} 2x+3y=30 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=30 \\ x=5+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(5+y)+3y=30 \\ x=5+y \end{cases}$$

Dans la première, on trouve y = 4.
Or x = 5 + y = 5 + 4 = 9

$$\boxed{S=\{(9;4)\}}$$

Par combinaison

$$\begin{cases} 3x+5y=13 \\ 4x-7y=72 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x+5y=13)\times 4 \\ (4x-7y=72)\times 3 \end{cases}$$

On multiplie les deux équations pour faire apparaître 12 devant les x

$$-\begin{cases} 12x+20y=52 \\ 12x-21y=216 \end{cases}$$

On soustrait les deux équations. (Les x disparaissent)

$$41y=-164$$

On résout l'équation obtenue.

$$y=\frac{-164}{41}$$

$$y=-4$$

On remplace y dans la 1ère équation :

$$3x+5\times(-4)=13$$
$$\Leftrightarrow x=11$$

$$\boxed{S=\{(11;-4)\}}$$

En général, vous trouvez la substitution plus rassurante (et donc plus facile) mais le plus souvent c'est la combinaison qui est la méthode la plus efficace car elle évite de manipuler des fractions. (Essayer de faire celle de droite par substitution et vous comprendrez ...)