

# Loi des grands nombres

En seconde, vous avez observé les fluctuations d'un échantillonnage, par exemple le nombre de piles obtenus sur 1000 pièces lancées. Vous avez alors constaté que le nombre de piles était toujours "autour" de 500 et vous avez alors énoncé la propriété  $|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

L'objectif de ce chapitre est d'arriver à démontrer une propriété similaire.

## I) Variable aléatoire moyenne

Un échantillon de taille  $n$  d'une loi de probabilité  $X$  est une liste de  $n$  variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  suivant cette loi  $X$ .

### Définition :

La variable aléatoire moyenne  $M_n$  de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  est définie par :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

### Propriétés :

$$E(M_n) = E(X) \quad V(M_n) = \frac{1}{n} V(X) \quad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma(X)$$

### Démonstration :

## II) Vers la loi des grands nombres

### Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Soit une variable aléatoire  $X$ . Pour tout réel  $\delta > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

### Inégalité de concentration :

Soit une variable aléatoire moyenne  $\bar{X}$  d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ . Pour tout réel strictement positif  $\delta$  on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

### Loi des grands nombres :

Soit une variable aléatoire moyenne  $\bar{X}$  d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ . Pour tout réel strictement positif  $\delta$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$$

*Qu'est-ce que cela signifie ?*

*Plus on prend un grand nombre de valeurs d'une variable aléatoire, plus la moyenne obtenue est proche de la valeur théorique (l'espérance).*