

Cours: Diviseurs et nombres premiers

Les nombres premiers sont connus de façon certaine depuis Euclide (vers 300 ac JC) qui en donne une définition claire et démontre leur infinité.

Ces nombres qui n'ont au départ qu'un intérêt mathématique se révéleront d'une importance fondamentale dans notre société d'aujourd'hui.

Tellement fondamentale qu'il existe des prix récompensant ceux découvrant des nombres premiers inconnus (à plusieurs millions de chiffres) : L'*Electronic Frontier Foundation* promettait une récompense de **150 000 dollars** pour la découverte d'un nombre premier à 100 millions de chiffres (en 2016).

I) Multiples et diviseurs

Définition:

$7 \times 13 = 91$ On dit que : 91 est un multiple de 7
91 est divisible par 7
7 est un diviseur de 91

Comment savoir si 7 divise 1 245 ?

On calcule $1245 / 7$, si le résultat est entier alors c'est oui.

$$\frac{1245}{7} \approx 177,857 \quad \text{donc non, 7 ne divise pas 1245}$$

Remarques :

Tous les nombres sont divisibles par 1.

Tous les nombres sont des diviseurs de 0.

Astuces :

Il existe des trucs qui permettent d'éviter de faire la division.

le nombre est divisible par	
10	s'il se termine par 0
5	s'il se termine par 0 ou 5
2	s'il se termine par 0,2,4,6 ou 8
4	si les deux derniers chiffres sont divisibles par 4
9	si la somme des chiffres fini sur 9
3	si la somme des chiffres fini sur 3,6 ou 9

Comment trouver tous les diviseurs de 60 ?

On divise 60 par tous les nombres entiers et on regarde si le résultat a une partie décimale ou non.

$60 \div 1 = 60$	1 est donc un diviseur de 60 et 60 aussi par la même occasion. En effet, on a $60 \div 60 = 1$
$60 \div 2 = 30$	2 et 30 sont des diviseurs de 60.
$60 \div 3 = 20$	3 et 20 sont des diviseurs de 60.
$60 \div 4 = 15$	4 et 15 sont des diviseurs de 60.
$60 \div 5 = 12$	5 et 12 sont des diviseurs de 60.
$60 \div 6 = 10$	6 et 10 sont des diviseurs de 60.
$60 \div 7 \approx 8,5$	7 n'est pas un diviseur de 60.
$60 \div 8 = 7,5$	8 n'est pas un diviseur de 60.

Quand le diviseur que l'on teste est plus grand que le résultat, on s'arrête.

Les diviseurs de 60 sont donc {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}

II) Nombre premier

Définition: Un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple : 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 ,

Propriété :

Tout nombre entier, supérieur ou égal à deux, peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.

Exemple : $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Comment décomposer un nombre en produit de facteurs premiers ?

On divise le nombre par les nombres premiers dans l'ordre, on garde le premier qui donne un résultat entier et on recommence (à partir du nombre premier où on en était) avec le résultat.

Décomposons 504 en produit de facteurs premiers :

$504 \div 2 = 207$	on garde le 2
$252 \div 2 = 126$	on garde le 2
$126 \div 2 = 63$	on garde le 2
$63 \div 2 = 31,5$	
$63 \div 3 = 21$	on garde le 3
$21 \div 3 = 7$	on garde le 3
7 est premier donc c'est fini	

Au final, $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

III) Simplifier une fraction

Méthode 1

Pour simplifier une fraction, il faut diviser en haut et en bas par le même nombre.

$$\frac{35}{140} = \frac{35 \div 7}{140 \div 7} = \frac{5}{20} = \frac{5 \div 5}{20 \div 5} = \frac{1}{4}$$

Méthode 2

On peut aussi décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis on simplifie en barrant les facteurs communs.

$$\frac{35}{140} = \frac{5 \times 7}{2 \times 2 \times 5 \times 7} = \frac{5 \times 7}{2 \times 2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{4}$$

A quoi ça sert ?

L'arithmétique trouve des applications dans la cyber-sécurité (mot de passe, code bancaire, ...), les codes (codes barres, code sécu, ...), la cryptographie (messages secrets, ...). Vous pouvez devenir millionnaire en résolvant certains problèmes d'arithmétique.

En fait, si vous arriviez à décomposer n'importe quel grand nombre en produit de facteurs premiers, vous seriez certainement réduit au silence par la CIA. Voilà l'importance des nombres premiers à l'heure actuelle.