Fonctions sinus et cosinus

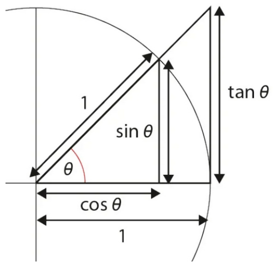
I) Dérivée et continuité

Lemme :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Démonstration :

1)



cas x > 0:

On démontre que $\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2}$

On en déduit $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$

Et on conclut avec le théorème des gendarmes.

2) $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{-\sin x}{\cos x + 1}$

Or $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *et* $\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + 1} = \frac{0}{2} = 0$ *par produit, nous concluons*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{-\sin x}{\cos x + 1} = 0 \quad \textit{i.e.} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Propriété :

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus.

Démonstration :

Soit un réel a, cherchons la limite de $\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ *lorsque h tend vers zéro.*

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin a \times \cos h + \sin h \times \cos a - \sin a}{h}$$
$$= \sin a \times \frac{(\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h}{h} \times \cos a$$

Or $\lim_{h \to 0} \sin a \times \frac{(\cos h - 1)}{h} = 0$ *car d'après le lemme* $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

et $\lim_{h \to 0} \cos a \times \frac{\sin h}{h} = \cos a$ *car d'après le lemme* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Par somme,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a$$

Conséquence :

> La fonction sinus est continue.

Propriété :

> La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, continue et $\cos' x = -\sin x$

Démonstration :

On sait que pour tout réel x, $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ *, donc la fonction cosinus est dérivable par composition et si* $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ *alors* $f'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

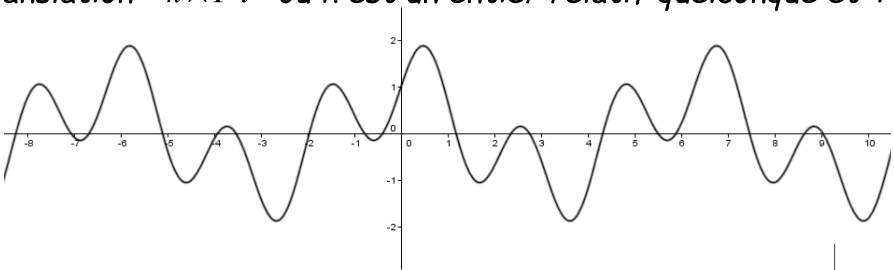
Or on sait également que $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x$ *cqfd.*

II) Rappel

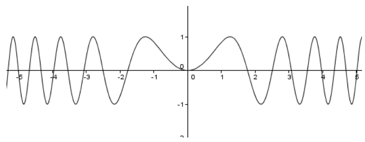
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

Définition :

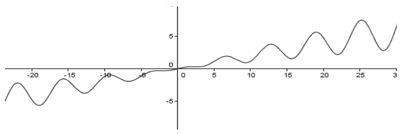
1) On dit que f est périodique de période T si pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$
la courbe se répéte par translation $k \times T \vec{i}$ *où k est un entier relatif quelconque et T la période*



2) On dit que f est paire si pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$
La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



3) On dit que f est impaire si pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$
La courbe est symétrique par rapport à l'origine.



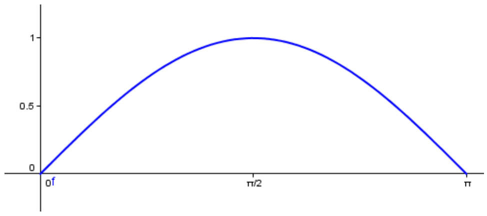
Pour étudier une fonction périodique, on détermine une période (la plus petite possible) et la parité de la fonction pour restreindre l'intervalle d'étude.

III) Sinus

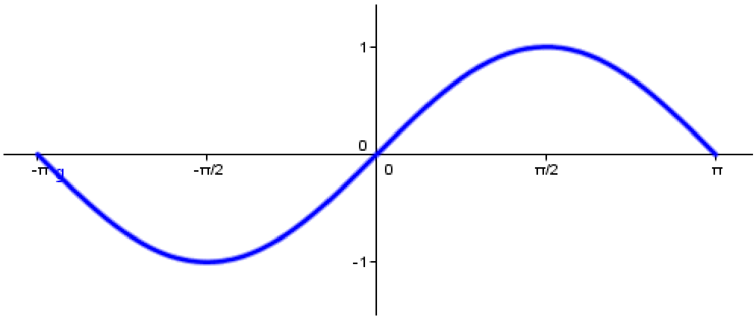
La fonction sinus est 2π-périodique ; on se limite à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
La fonction sinus est impaire ; on se limite à l'intervalle $[0 ; \pi]$

Pour tout réel x, $\sin' x = \cos x$

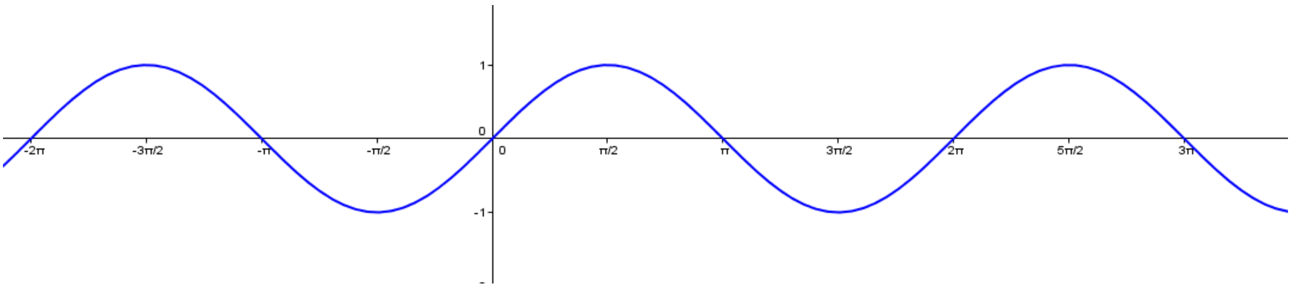
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Comme la fonction sinus est impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.



Comme la fonction sinus est périodique de période 2π , on reproduit ce morceau de courbe en effectuant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où k est un entier relatif.



La courbe de la fonction sinus est appelée **sinusoïde**.

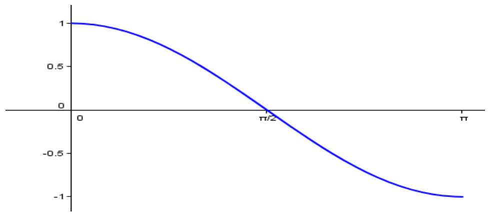
IV) Cosinus

La fonction cosinus est $2\pi-\text{périodique}$; on se limite à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.
La fonction cosinus est paire ; on se limite à l'intervalle $[0\,;\pi]$

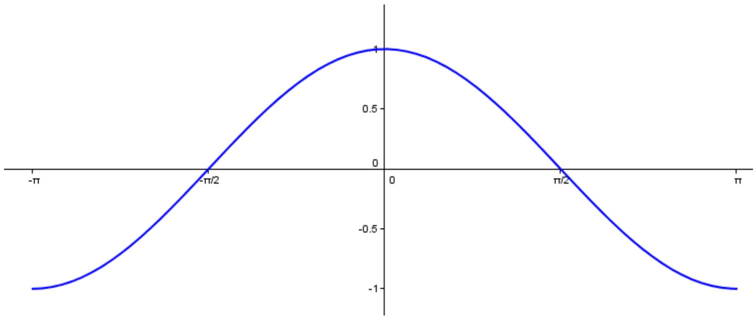
Pour tout réel x, $\cos' x=\sin x$

x	0	π
$-\sin(x)$	$-$	
$\cos$	1 ↘	0

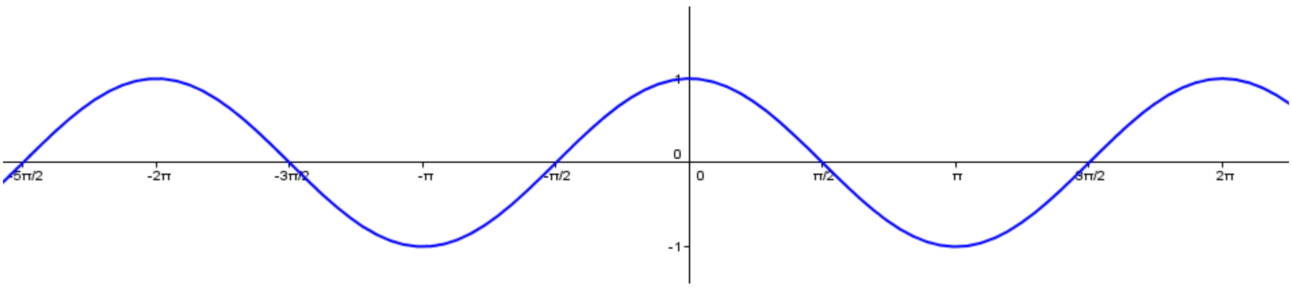
-1



Comme la fonction cosinus est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Comme la fonction cosinus est périodique de période 2π, on reproduit ce morceau de courbe en effectuant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où k est un entier relatif.



La courbe de la fonction cosinus est également une **sinusoïde**.

V) Exemple

Etudions la fonction $d(t)=1{,}5\cos(\frac{\pi}{2}t)+50$

Période :

Cette fonction a une période T = 4 , en effet

$$d(t+4)=1{,}5\cos(\frac{\pi}{2}(t+4))+50=1{,}5\cos(\frac{\pi}{2}t+2\pi)+50=1{,}5\cos(\frac{\pi}{2}t)+50=d(t)$$

On restreint l'étude à l'intervalle [-2 ; 2]

Parité :

Cette fonction est paire, en effet :

$$d(-t)=1{,}5\cos(\frac{\pi}{2}\times(-t))+50=d(t)$$

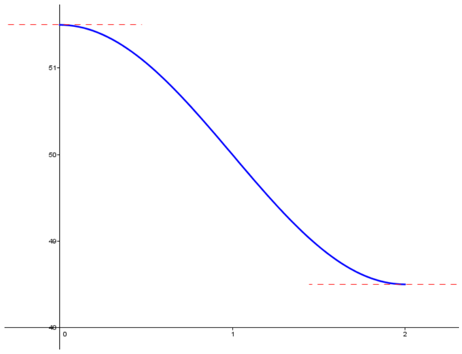
On restreint l'étude à l'intervalle [0 ; 2]

Variations :

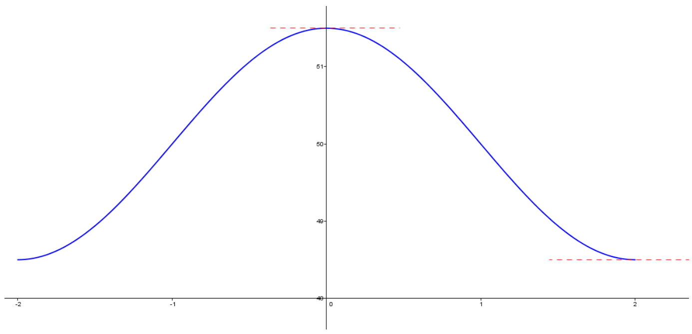
Nous avons $d'(t) = -\frac{3\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

x	0		2
$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	0	+	0
$-\frac{3\pi}{4}$		-	
$d'(t)$	0	-	0
Variation de *d*	51,5	$\searrow$	48,5

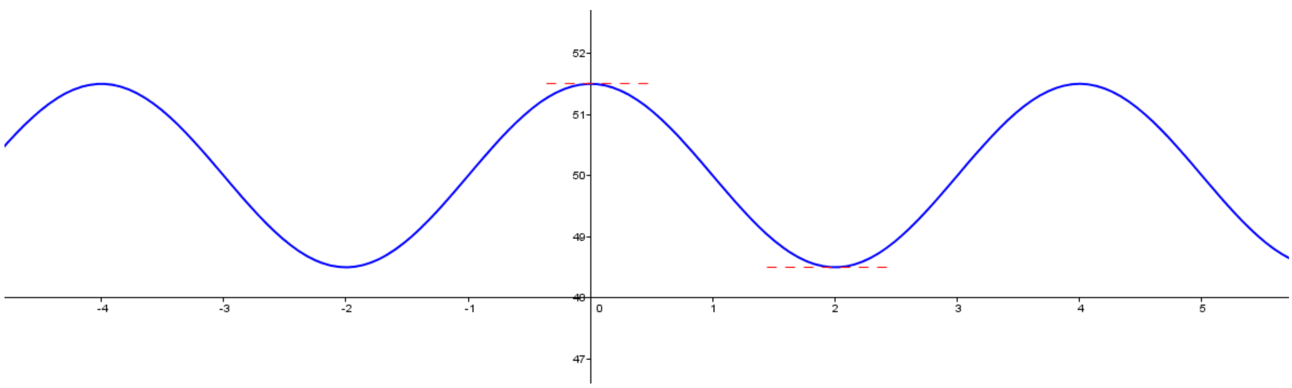
On trace les tangentes horizontales et l'allure de la courbe sur [0 , 2]:



Puis, la fonction étant paire, on trace le symétrique par rapport à (Oy) :



Enfin, la fonction étant périodique de période 4, on répéte ce morceau de courbe :



V) Equation trigonométriques

Propriété :

$$\sin x = \sin\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \theta + 2k\pi \\ x = \pi - \theta + 2k'\pi \end{cases}$$

Propriété :

$$\cos x = \cos\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \theta + 2k\pi \\ x = -\theta + 2k'\pi \end{cases}$$

A quoi cela sert ?

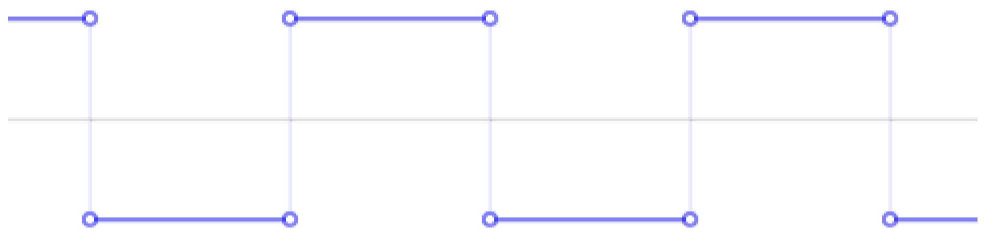
1) Lorsque l'on manipule des angles (géométrie par exemple, vitesse angulaire, ...)

2) Pour décrire les tensions sinusoidales

3) Résoudre certaines équations différentielles (celle décrivant les oscillations d'un pendule ou d'une masse sur un ressort par exemple)

4) Fonction de transition : Rejoindre deux points d'un repère en ayant des tangentes horizontales au départ et à l'arrivée (vitesse nulle, accélération continue). C'est le principe du toboggan.

5) Analyse de Fourier :
Tout signal périodique peut se décomposer comme une somme (en général infinie) de sinus et de cosinus ; le son, la lumière ou un signal créneau en sont des exemples.



Cette courbe peut être décrite par :

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \ldots$$