Cours : géométrie repérée

René Descartes (1596-1650) propose, dans son ouvrage Géométrie, de résoudre les problèmes de géométrie en utilisant toujours le calcul algébrique. C'est tout l'objectif de ce chapitre.

I) Rappel

Repère :

Un repère du plan est défini par $(O;\vec{i};\vec{j})$ où O est l'origine du repère, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non-colinéaires définissant l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

On peut également écrire $(O;I;J)$ où I et J sont les points tels que $\vec{OI}=\vec{i}$ et $\vec{OJ}=\vec{j}$.

Colinéaire :

On dira que deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ sont colinéaires si $det(\vec{u},\vec{v})=x_u y_v-y_u x_v=0$.

Propriété :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$

II) Equations de droites

Vous savez qu'une droite d'équation $ax+by+c=0$ admet $\vec{u}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Réciproquement, un vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ engendre une droite d'équation $5x-4y+c=0$.

Définition :
Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à une droite s'il est orthogonal à un vecteur directeur de celle-ci.

Considérons une droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ *. La droite (d) est l'ensemble des points M tels que* $\vec{n}.\vec{AM}=0$

Propriété : avec $(a,b)\neq(0,0)$

Une droite de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$

Une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Démonstration :

1) Soit une droite (d) tel que $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ *soit un vecteur normal de (d) et* $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ *un point de (d)*

Tous les points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *de (d) vérifient* $\vec{n}.\vec{AM}=0$ *i.e.* $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

En développant, $ax+by+c=0$ *où* $c=-ax_A-by_B$

2) Soit une droite (d) d'équation $ax+by+c=0$ *,* $\vec{u}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur.*

Or le vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ *est orthogonal à* $\vec{u}$ *, c'est donc un vecteur normal à (d).*

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point A sur une droite (d).

1- De l'équation de la droite (d) on obtient un vecteur normal, qui est un vecteur directeur de (AH).
2- On détermine alors une équation cartésienne de (AH).
3- H est le point d'intersection des deux droites (AH) et (d), on résout le système.

III) Equations de cercle

Propriété :

Soit un cercle C de centre $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de rayon R.

Une équation cartésienne de ce cercle est $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$

Démonstration :

Tous les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *de C vérifient* $AM=R \Leftrightarrow AM^2=R^2$

Donc $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$

Propriété :

Le cercle C de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

Démonstration :

Vous savec depuis la quatrième que tous les points du cercle (exceptés A et B) forment un triangle rectangle avec un diamètre.
Si M=A ou M=B, l'un des deux vecteurs est le vecteur nul et la relation est vérifiée.

Application :

Soient les points $A\begin{pmatrix} 10 \\ -12 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].

On cherche le centre et le rayon :

Le centre I est le milieu de [AB] donc $I\begin{pmatrix} 3,5 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Le rayon est la moitié de AB donc $R^2=13^2+10^2=269$

Une équation du cercle est :

$$\boxed{(x-3,5)^2+(y+7)^2=269}$$