

Cours: Récurrence et suites

I) Démontrer par récurrence

Définition:

La démonstration par récurrence est un type de démonstration qui permet de démontrer une propriété sur l'ensemble des entiers naturels à partir d'un rang n_0 .

Pour démontrer une propriété par récurrence à partir de n_0 , on respectera toujours quatre étapes (soyez rigoureux) :

- 1 - **Introduction** : on énonce la propriété à démontrer
- 2 - **Initialisation** : on vérifie la propriété au rang n_0
- 3 - **Hérédité** : On suppose que la propriété est vraie pour un entier $n \geq n_0$ (c'est ce que l'on appelle l'hypothèse de récurrence), et on démontre que la propriété est vraie pour l'entier $n+1$
- 4 - **Conclusion** : La propriété est vraie au rang n_0 et est héréditaire, donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq n_0$

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n = 4 \times 3^n + 2$ pour tout $n \geq 0$

Introduction : Démontrons par récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, la propriété " $u_n = 4 \times 3^n + 2$ "

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0=6$ et $4 \times 3^0 + 2 = 6$, la propriété est vraie au rang $n=0$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un entier n , c'est-à-dire que l'on a $u_n = 4 \times 3^n + 2$ (c'est notre hypothèse de récurrence) et démontrons la au rang suivant.

$$u_{n+1} = 3u_n - 4$$

$$u_{n+1} = 3(4 \times 3^n + 2) - 4 \quad \text{en utilisant l'hypothèse de récurrence}$$

$$u_{n+1} = 4 \times 3 \times 3^n + 6 - 4$$

$$u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} + 2 \quad \text{c'est la propriété au rang } n+1$$

Nous venons de montrer que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$

Conseils :

L'initialisation est en général très facile à vérifier, pour l'hérédité écrivez d'abord la propriété au rang $n+1$ pour savoir où vous allez.

Attention à bien faire l'initialisation ET l'hérédité, voici deux contre-exemples :

1) On considère la suite $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ et la propriété $H(n)$: " $u_n \geq 0$ "

2) On considère la propriété $P(n)$: " $5^n - 2$ est un multiple de 3" pour $n \geq 1$

II) Application aux suites

a) Variation d'une suite

Vous avez vu en première que l'on pouvait conjecturer graphiquement le sens de variation d'une suite (c'est-à-dire déterminer si elle est croissante, décroissante, ...).

Vous avez également vu que l'on pouvait le démontrer grâce aux théorèmes suivants :

Si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n alors u_n est décroissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n alors u_n est décroissante.
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et $u_n > 0$ pour tout n alors u_n est décroissante.

En inversant les inégalités, on démontre que u_n est croissante.

Si il existe une fonction croissante f telle que $u_n = f(n)$ alors u_n est croissante.

Seulement ces méthodes ne fonctionnent pas tout le temps, il peut être alors utile d'utiliser une démonstration par récurrence.

Exemple :

Considérons la suite $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0.5u_n - 3 \end{cases}$
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On veut montrer que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier n .

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = -2$ donc $u_1 \leq u_0$, c'est la propriété au rang 0.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie au rang n , c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$, on a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n \\ 0.5 u_{n+1} &\leq 0.5 u_n \\ 0.5 u_{n+1} - 3 &\leq 0.5 u_n - 3 \\ u_{n+2} &\leq u_{n+1} \quad \text{c'est la propriété au rang } n+1 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

La propriété est vraie pour $n=0$ et héréditaire, donc par récurrence elle est vraie pour tout entier n .
Nous venons de démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Suites minorées, majorées, bornées

Définition :

(u_n) est majorée par un réel $M \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

(u_n) est minorée par un réel $m \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$

(u_n) est bornée deux réels $M, N \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$

La première phrase se lit ; "On dit qu'une suite (u_n) est majorée par un réel M si et seulement si pour tout $n \geq 0$ on a $(u_n) \leq M$ "

Exemple :

La suite de terme général $u_n = \cos(n)$ est majorée par 1. Elle est aussi majorée par 2, 3, 19, 3.14, etc...

Théorème :

Une suite croissante est minorée par son premier terme.
Une suite décroissante est majorée par son premier terme.

Démo : Soit une suite (u_n) croissante.

Introduction : On souhaite démontrer par récurrence sur n la propriété " $u_n \geq u_0$ "

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 \geq u_0$, la propriété est vraie au rang $n=0$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un entier n , c'est-à-dire que l'on a $u_n \geq u_0$ et démontrons la au rang suivant.

Comme (u_n) est croissante, $u_{n+1} \geq u_n$ et puisque $u_n \geq u_0$ nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} \geq u_n \geq u_0$$

Finalement $u_{n+1} \geq u_0$ *c'est la propriété au rang $n+1$*

Nous venons de montrer que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$

La démonstration pour une suite décroissante est similaire.

Méthode : Etude de majorant, minorant

1) directement : Encadrer la suite (u_n) de terme général $u_n = 2\cos(n) - 7$

$$\begin{aligned} \text{Comme pour tout entier } n, \quad & -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\ & -2 \leq 2\cos(n) \leq 2 \\ & -9 \leq 2\cos(n) - 7 \leq -5 \end{aligned}$$

et la suite (u_n) est bornée par -9 et -5.

2) par récurrence : Montrer que la suite $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$ est majorée par 10

Nous voulons montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 10$ pour tout entier n .

Initialisation : $0 \leq u_0 = 10 \leq 10$, la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit un entier n . Supposons que $0 \leq u_n \leq 10$

$$\text{Donc } 0 \leq 2u_n \leq 20$$

$$3 \leq 2u_n + 3 \leq 23$$

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq \sqrt{23}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 10$$

C'est la propriété au rang $n+1$

Nous venons de montrer que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, donc par récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$

3) En étudiant les variations de la suite :

Montrer que la suite $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n^2 - 3v_n + 4 \end{cases}$ est minorée par 3.

$$\begin{aligned} \text{On a } v_{n+1} - v_n &= v_n^2 - 4v_n + 4 \\ &= (v_n - 2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ainsi $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et la suite est croissante donc minorée par $v_0 = 3$

4) En étudiant le signe de $u_n - m$:

Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{-9n+2}{2n-1}$ est minorée par -5 pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

Soit un entier $n \geq 3$,

$$u_n - (-5) = \frac{-9n+2}{2n-1} + \frac{5(2n-1)}{2n-1} = \frac{n-3}{2n-1}$$

et comme $n \geq 3$, on a $n-3 \geq 0$ et $2n-1 > 0$

$$\text{Donc } u_n - (-5) = \frac{n-3}{2n-1} \geq 0 \text{ et ainsi } u_n \geq -5$$

La suite (u_n) est minorée par -5 pour tout entier n supérieur ou égal à 3.