

Chapitre 1 : Nombres réels

I) L'ensemble des réels

a) Droite des réels

Définition: $\mathbb{N}$: Entiers naturels $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$

$\mathbb{Z}$: Entiers relatifs $\{\dots -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

$\mathbb{D}$: Décimaux $\{-1,25; 3,784; 2; -4; \dots\}$

$\mathbb{Q}$: Rationnels aussi appelés quotients $\left\{ \frac{2}{3} ; 2,5 = \frac{5}{2} ; 2 = \frac{2}{1} \dots \right\}$

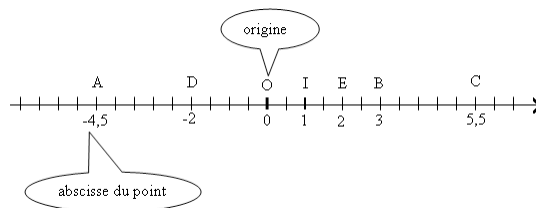
$\mathbb{R}$: Réels {tous les nombres} c'est ici que l'on mettra π .

On a donc par définition:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Le symbole $\subset$ se lit "est inclus dans"

On peut placer tous les nombres sur une droite que l'on nommera droite des réels ou encore axe des abscisses.



Les points sont alors repérés par leurs abscisses : A (-4,5)

L'échelle (les graduations) est bien sûr adaptée en fonction de la situation.

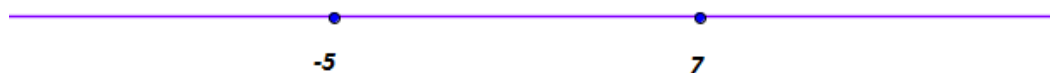
b) Les intervalles

La double inégalité $-5 \leq x \leq 7$ se lit x est compris entre -5 et 7.

Si on regroupe tous les nombres qui vérifient cette inégalité, nous obtenons un ensemble que l'on appellera intervalle et que l'on notera : $I = [-5; 7]$

La double inégalité initiale s'écrit alors $x \in [-5; 7]$ *x appartient à l'intervalle $[-5; 7]$*

On peut la représenter graphiquement sur un axe des abscisses :



Remarque : Si l'inégalité est stricte, il faudra exclure la borne correspondante. *on ouvre le crochet*
Si l'inégalité est large, il faut inclure la borne. (on "agrafe") *on ferme le crochet*

On peut distinguer trois sortes d'intervalles :

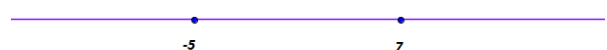
- les intervalles **fermés** où les deux bornes sont incluses : $[-5; 7]$
- les intervalles **ouverts** où les deux bornes sont exclues : $] -5; 7[$
- les intervalles **semi-ouverts** où l'une des bornes est exclue et l'autre est incluse : $] -5; 7]$

Pour représenter les ensembles définis par une inégalité simple, on introduit le symbole infini : ∞

Attention, ce symbole n'est pas un nombre et ne peut jamais être inclus dans un intervalle.

$$x \in [-5; +\infty[$$

$$x \geq -5$$



$$x \in]-\infty; 7[$$

$$x < 7$$



Attention, $-\infty$ est toujours à gauche, $+\infty$ est toujours à droite.

c) Valeur absolue

Définition:

La valeur absolue d'un nombre est la distance sur l'axe des réels entre ce point et l'origine.

$$\text{Si } x \geq 0 \text{ alors } |x| = x$$

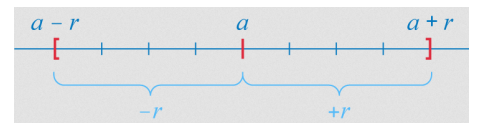
$$\text{Si } x < 0 \text{ alors } |x| = -x$$

- Remarque :
- La valeur absolue "enlève" le signe moins
 - Pour calculer la distance entre deux points A(a) et B(b) sur l'axe des réels, on utilise la valeur absolue : $d(A, B) = |b - a|$
 - $\forall x, y; |x - y| = |y - x|$

Propriété :

Soit r un réel strictement positif et un point A (a). Pour tout réel x :

- $|x| \leq r$ signifie que $-r \leq x \leq r$
- $|x - a| \leq r$ signifie que $a - r \leq x \leq a + r$



II) Décimaux et rationnels

a) Décimaux

Définition:

d est un nombre décimal s'il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $d = \frac{a}{10^n}$

Démonstration : $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

On raisonne par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. (et on va montrer que c'est faux!)

Il existe donc un entier relatif a et un entier naturel n tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$

Ainsi $1 \times 10^n = 3 \times a$ et $a = \frac{10^n}{3}$.

Or, une puissance de 10 n'est jamais divisible par 3, *puisque la somme de ses chiffres vaut toujours 1*, donc la fraction $\frac{10^n}{3}$ n'est pas entière et a n'est pas entier. Cela contredit la première hypothèse.

Finalement, $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Propriété :

Un nombre décimal a une partie décimale qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres.

Définition - propriété :

Pour tout réel x et tout entier naturel n , il existe un nombre décimal d tel que :

$$|x - d| \leq \frac{1}{10^n}$$

d est alors appelé valeur approchée de x à 10^{-n} près.

- Remarque :
- Il n'y a pas unicité de la valeur approchée.
 - Chercher une valeur approchée à 10^{-n} près revient à chercher un nombre à n décimales

b) Rationnels

Définition:

Un nombre q est rationnel s'il existe deux entiers relatifs a et b (avec $b \neq 0$) tels que $q = \frac{a}{b}$

Démonstration :

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers naturels a et b (avec $b \neq 0$) tels que

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et que $\frac{a}{b}$ soit irréductible.

En élevant au carré, $2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$, nous en concluons que a est pair.

Donc il existe un entier a' tel que $a = 2a'$.

Ainsi $2b^2 = a^2 = (2a')^2 = 4a'^2$ et en divisant par 2 $b^2 = 2a'^2$, nous en concluons que b est pair.

Puisque a et b sont pairs tous les deux, la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible ce qui contredit l'hypothèse.

Finalement, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

III) Inégalités

$a, b, c, d, x, y \in \mathbb{R}$

a) Ordre dans $\mathbb{R}$

Propriété :

Si $a < b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$

b) Opérations

On peut ajouter (ou soustraire) un réel : $a < b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

On peut ajouter (et pas soustraire) deux inégalités membre à membre si elles ont le même sens :

Si $a < x < b$ et $c < y < d$ alors $a + c < x + y < b + d$

On peut multiplier (ou diviser) par un nombre strictement positif chaque membre :

Si $b > 0$ alors $x < y \Leftrightarrow b \times x < b \times y$

On peut multiplier (ou diviser) par un nombre strictement négatif chaque membre MAIS il faut alors changer le sens de l'inégalité :

Si $b < 0$ alors $x < y \Leftrightarrow b \times x > b \times y$

IV) Compléments sur intervalle

a) Intersection d'intervalles

Les réels appartenant à la fois à l'intervalle $[8;16[$ et à l'intervalle $]6;10[$ sont tous les réels de l'intervalle $[8;10[$.

On dit que l'intervalle $[8;10[$ est l'**intersection** des intervalles $[8;16[$ et $]6;10[$.

On notera $[8;16[\cap]6;10[= [8;10[$ *Le symbole $\cap$ se lit "inter" et signifie intersection*



b) Réunion d'intervalles

Les réels appartenant soit à l'intervalle $[10;12]$, soit à l'intervalle $]12;16[$ (ou dans les deux) sont les réels de l'intervalle $[10;16]$.

On dit que l'intervalle $[10;16]$ est la réunion des intervalles $[10;12]$ et $]12;16[$

On notera $[10;12] \cup]12;16[= [10;16]$ *Le $\cup$ se lit "union".*

