Cours: Probabilités

Ω est un univers, P est une probabilité sur Ω, A et B sont deux évènements de Ω.

I) Probabilités conditionnelles

Définition :

Si $P(A)\neq 0$, la **probabilité de B sachant A** est : $\boxed{P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}}$.

Exemple :

	A	$\bar{A}$	Total
B	26	18	44
$\bar{B}$	51	16	67
Total	77	34	111

$$P(A)=\frac{77}{111}\ ,\quad P(B)=\frac{44}{111}\ ,\quad P(A\cap B)=\frac{26}{111}\ ,\quad P_A(B)=\frac{26}{77}$$

Formule de Bayes :

Si $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$, alors $P_A(B)=\dfrac{P(B)\times P_B(A)}{P(A)}$

Démonstration : easy, débrouillez-vous !

II) Arbres pondérés

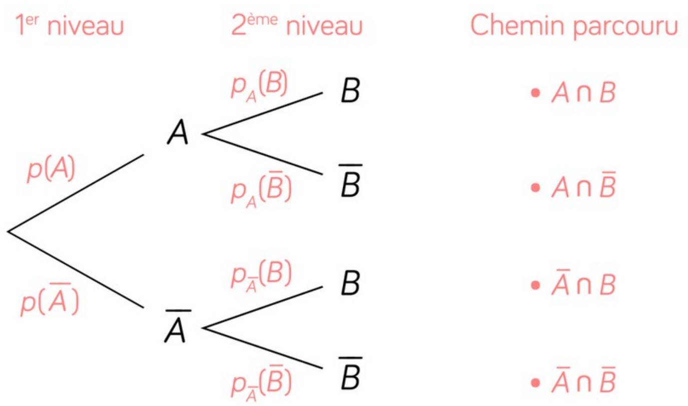
Définition :

1) A et B sont dit disjoints si $P(A\cap B)=0$. On dit aussi que A et B sont incompatibes.

2) On dit qu'un ensemble d'évènements forment une partition d'un univers lorsque ces évènements sont disjoints, de probabilité non nulle et la somme de leur probabilité est 1. Ces évènements "couvrent" tous les cas possibles.

Règles de construction d'un arbre:

- Les évènements partant d'un même noeud forment une partition de Ω, ainsi la somme des probabilités partant d'un même noeud est toujours 1.
- Les probabilités présentes sur les branches suivants la première sont des probabilités conditionnelles.



Propriété :

$$\text{Si } P(A)\neq 0 \text{ et } P(B)\neq 0 \text{ , alors } P_A(B)\times P(A)=P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)$$

Démonstration : triviale

Cette propriété permet de justifier une règle de calculs sur les arbres pondérés, un chemin est l'intersection des évènements rencontrés, la probabilité qu'il se réalise est le produit des probabilités rencontrées.

Formule des probabilités totales :

Pour deux évènements :

$$\text{Si } P(A)\neq 0 \text{ et } P(\bar{A})\neq 0 \text{ ,alors } \boxed{P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)}$$

$$=P(A)\times P_A(B)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)$$

Cette formule se généralise pour *n* événements.
Cette propriété permet de justifier une autre règle de calculs sur les arbres pondérés, la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins réalisant cet évènement.

Exemple :
Le service de maintenance effectue l'entretien des machines,mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002
- la probabilité que l'alarme se déclenche sachant qu'il y a une panne est égale à $\frac{37}{40}$
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'évènement : « l'alarme se déclenche »
- B l'évènement : « une panne se produit »

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Correction :

Arbre :

1) $P(A\cap B)=P(B)\times P_B(A)=0.04\times\frac{37}{40}=0.037$

2) Nous avons d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})=0.037+0.002=0.039$$

3) $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.037}{0.039}=\frac{37}{39}\approx 0.949$