

Cours: Diviseurs et nombres premiers

Les nombres premiers sont connus de façon certaine depuis Euclide (vers 300 ac JC) qui en donne une définition claire et démontre leur infinité.

Ces nombres qui n'ont au départ qu'un intérêt mathématique se révéleront d'une importance fondamentale dans notre société d'aujourd'hui.

Tellement fondamentale qu'il existe des prix récompensant ceux découvrant des nombres premiers inconnus (à plusieurs millions de chiffres) : L'Electronic Frontier Fondation promettait une récompense de **150 000 dollars** pour la découverte d'un nombre premier à 100 millions de chiffres (en 2016).

I) Multiples et diviseurs

Définition:

$7 \times 13 = 91$ On dit que : 91 est un multiple de 7
91 est divisible par 7
7 est un diviseur de 91

Comment savoir si 7 divise 1 245 ?

On calcule $1245 / 7$, si le résultat est entier alors c'est oui.

$$\frac{1245}{7} \approx 177,857 \quad \text{donc non, 7 ne divise pas 1245}$$

Remarques :

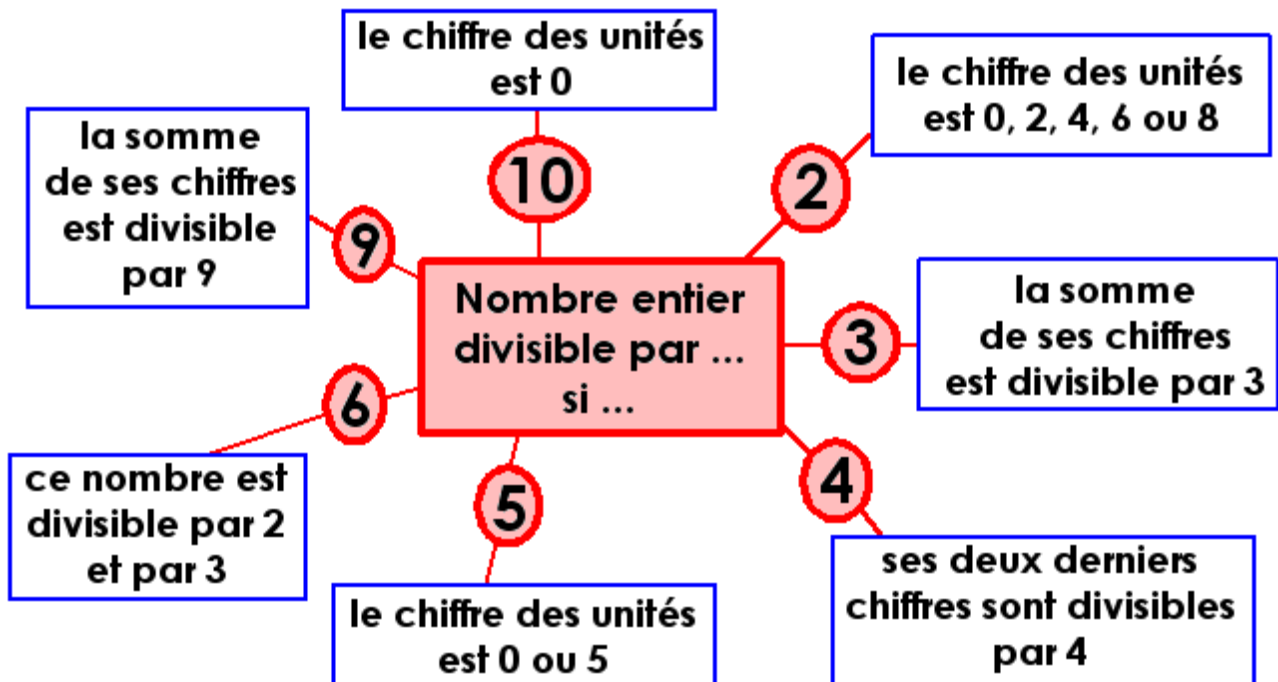
Tous les nombres sont divisibles par 1.

Tous les nombres sont des diviseurs de 0.

Astuces :

Il existe des critères qui permettent d'éviter de faire la division.

Les critères de divisibilité



II) Nombre premier

Définition: Un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Cherchons les nombres premiers inférieurs à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Au final, les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ;
61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 et 97.

Les nombres premiers inférieurs à 20 sont à retenir par cœur, les autres on les retrouve.

Par exemple, si je vous demande quels sont les nombres premiers entre 60 et 70.

On écrit tous les nombres, puis on barre les pairs, on barre les multiples de 5.

On barre les multiples de 3 (il suffit d'en trouver un puis on compte de 3 en 3) et

enfin on barre les multiples de 7 (il suffit d'en trouver un puis on compte de 7 en 7)

60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70

Les nombres premiers entre 60 et 70 sont : 61 et 67.

III) Décomposition en facteurs premiers

Propriété :

Tout nombre entier, supérieur ou égal à deux, peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.

Exemple : $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$

Comment décomposer un nombre en produit de facteurs premiers ?

On divise le nombre par les nombres premiers dans l'ordre, on garde le premier qui donne un résultat entier et on recommence (à partir du nombre premier où on en était) avec le résultat.

Décomposons 504 en produit de facteurs premiers :

$$504 \div 2 = 252 \quad \text{on garde le 2}$$

$$252 \div 2 = 126 \quad \text{on garde le 2}$$

$$126 \div 2 = 63 \quad \text{on garde le 2}$$

$$63 \div 2 = 31,5$$

$$63 \div 3 = 21 \quad \text{on garde le 3}$$

$$21 \div 3 = 7 \quad \text{on garde le 3}$$

7 est premier donc c'est fini

Au final, $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

III) Simplifier une fraction

Méthode 1

Pour simplifier une fraction, il faut diviser en haut et en bas par le même nombre.

$$\frac{35}{140} = \frac{35 \div 7}{140 \div 7} = \frac{5}{20} = \frac{5 \div 5}{20 \div 5} = \frac{1}{4}$$

Méthode 2

On peut aussi décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis on simplifie en barrant les facteurs communs.

$$\frac{35}{140} = \frac{5 \times 7}{2 \times 2 \times 5 \times 7} = \frac{5 \times 7}{2 \times 2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{4}$$

A quoi ça sert ?

L'arithmétique trouve des applications dans la cyber-sécurité (mot de passe, code bancaire, ...), les codes (codes barres, code sécu, ...), la cryptographie (messages secrets, ...). Vous pouvez devenir millionnaire en résolvant certains problèmes d'arithmétiques.

En fait, si vous arriviez à décomposer n'importe quel grand nombre en produit de facteurs premiers, vous seriez certainement réduit au silence par la CIA. Voilà l'importance des nombres premiers à l'heure actuelle.