

# Cours: Compléments sur la dérivation

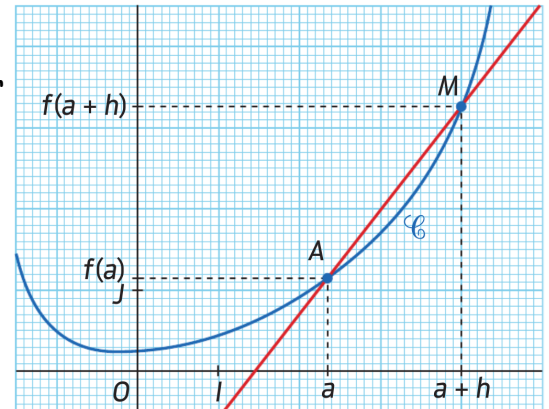
## I) Rappel sur la dérivation

### Définition: Taux d'accroissement

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ ,  $a$  un réel de  $I$  et  $h$  un réel non nul tel que  $a+h$  soit dans  $I$ .

On appelle taux d'accroissement de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  le coefficient directeur de la droite passant par les points de  $f$  ayant pour abscisses  $a$  et  $a+h$  i.e. le réel :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



### Définition: Nombre Dérivé

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si le taux d'accroissement tend vers un réel lorsque  $h$  tend vers 0 (si, en simplifiant, on peut remplacer  $h$  par 0).

Cette limite est appelée nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et est noté  $f'(a)$

### Définition: Fonction Dérivée

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si pour tout  $a$  de  $I$ ,  $f$  est dérivable en  $a$  alors on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

La fonction qui à un réel  $x$  associe le nombre  $f'(x)$  est appelé fonction dérivée de  $f$ .

Fonction	Fonction dérivée
$k \in \mathbb{R}$	0
$x$	1
$ax+b$	$a$
$x^n$	$nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$e^x$	$e^x$

## Opération sur les dérivées

$$\forall k \in \mathbb{R}; (ku)' = ku'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

### Définition: Tangente

Soit un réel  $a$  et une fonction  $f$  dérivable en  $a$ .

On appelle tangente à la courbe représentative de  $f$  la droite passant par le point  $(a, f(a))$  et de coefficient directeur  $f'(a)$ .

Equation de la tangente en  $a$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

## II) Composition de fonction

### Définition: Composée

On dit qu'une fonction  $g$  est la composée de deux fonctions  $f$  et  $h$  si l'image de  $x$  par la fonction  $g$  se calcule en appliquant d'abord l'une des deux fonctions puis en appliquant au résultat la deuxième fonction. On note  $g = f \circ h$  (on lit  $f$  rond  $h$ ).

$$\text{Ainsi } g(x) = f \circ h(x) = f[h(x)]$$

Par exemple, a)  $g(x) = \sqrt{5x^2 + 2} = f \circ g(x)$  avec  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = 5x^2 + 2$

b)  $g(x) = \frac{-8}{3 \sin x} = f \circ g(x)$  avec  $f(x) = \frac{-8}{x}$  et  $g(x) = 3 \sin x$

### Propriété :

Soient  $u$  et  $f$  deux fonctions continues.

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$$

$$\text{Aussi noté } [f(u)]' = u' \times f'(u)$$

mais c'est moins rigoureux

### Démonstration :

$$\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = \frac{f(u(x)+k) - f(u(x))}{h} \quad \text{avec } k = u(x+h) - u(x)$$

$$= \frac{f(u(x)+k) - f(u(x))}{k} \times \frac{k}{h}$$

$$= \frac{f(u(x)+k) - f(u(x))}{k} \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Lorsque  $h$  tend vers 0, on remarque que  $k$  tend également vers 0.

On a donc  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(u(x)+k) - f(u(x))}{k} = f'(u(x))$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$

En faisant tendre  $h$  vers 0, on obtient finalement :  $[f(u)]' = u' \times f'(u)$

Cette propriété nous permet de généraliser toutes les formules de notre tableau.  
Soit  $u$  une fonction.

Fonction	Fonction dérivée
$u^n$	$n u' u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{u^n}$	$-n \frac{u'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$e^u$	$u' e^u$

Application :

Déterminer la dérivée de  $g(x) = \sqrt{5x^2 + 2}$

Notons  $u = 5x^2 + 2$

$u' = 10x$  or on a  $g = \sqrt{u}$  donc  $g' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

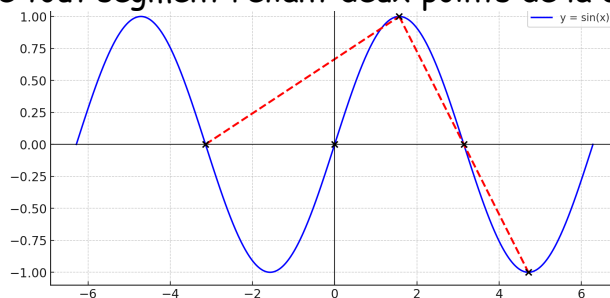
Finalement  $g'(x) = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 + 2}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 2}}$

### III) Convexité

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

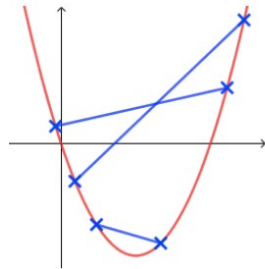
**Définition: Corde**

On appelle corde tout segment reliant deux points de la courbe de  $f$ .

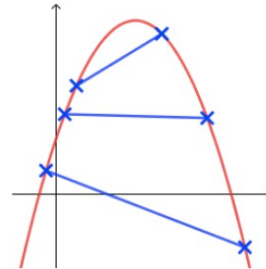


### Définition 1:

- 1)  $f$  est **convexe** sur  $I$  si sa courbe est en-dessous de chacune de ses cordes.
- 2)  $f$  est **concave** sur  $I$  si sa courbe est au-dessus de chacune de ses cordes.



Fonction convexe



Fonction concave

Mémo : Une fonction convexe ressemble à un bol, on peut y verser de la "contrex".  
Une fonction concave à la forme de la voûte d'une cave.

### Définition 2:

- 1)  $f$  est **convexe** sur  $I$  si sa courbe est en-dessus de chacune de ses tangentes.
- 2)  $f$  est **concave** sur  $I$  si sa courbe est au-dessous de chacune de ses tangentes.

### Propriété 1: formule liant convexité et cordes

Si  $f$  est **convexe** sur  $I$  alors pour tous réels  $a, b$  de  $I$ , on a l'inégalité :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Si  $f$  est **concave** sur  $I$  alors pour tous réels  $a, b$  de  $I$ , on a l'inégalité :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Remarque: on peut généraliser cette formule par :

$$f \text{ est convexe} \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], f(ta + b(1-t)) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$

### Propriété 2: formule liant convexité et dérivée

Si  $f$  est **convexe** sur  $I$  alors pour tous réels  $a, x$  de  $I$ , on a l'inégalité :

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$

### Propriété 3: lien entre convexité et dérivée seconde

$f$  est **convexe** sur  $I$  si et seulement si  $f''$  est positive.

### Démonstration :

Soit une fonction  $f$  définie sur  $I$ , dérivable deux fois et telle que pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $f''(x) > 0$ .

Soit un réel  $a$  de  $I$ .

On veut montrer que  $f$  est convexe i.e.  $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$

Ou encore  $f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \geq 0$

Posons  $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$  et étudions les variations de  $g$ .

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) \quad \text{Puisque } f'' > 0, f' \text{ est croissante donc } g' \text{ est croissante également.}$$

Donc  $g'$  est donc d'abord négative, s'annule en  $a$  puis est positive.

On en déduit les variations de  $g$ .

Or on remarque que  $g(a) = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0$

$x$	$a$
$g'(x)$	- 0 +
$g(x)$	↙ 0 ↘

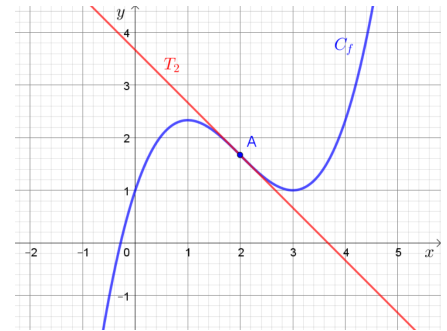
La fonction  $g$  est donc positive sur  $I$  et on peut écrire  $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \geq 0$   
 ou encore  $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$

cqfd

#### IV) Point d'inflexion

##### Définition:

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .  
 Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente.



##### Propriété

Lorsqu'elle atteint un point d'inflexion, la courbe change de convexité.

#### V) Utilité de la dérivation

##### A quoi cela sert-il ?

1) On peut, en étudiant le signe de la dérivée, déterminer les variations d'une fonction. Les variations d'une fonction nous permettent de résoudre des équations, de déterminer le nombre de solutions, d'anticiper l'évolution d'un système, ...

2) On peut, en résolvant  $f'(x) = 0$ , déterminer les points où la tangente à la courbe est horizontale. Ces points sont soit des extremums (i.e. maximum ou minimum) ou des points d'inflexion (penser à  $x^3$ ). Les extremums nous permettent de résoudre les problèmes d'optimisation (minimiser des coûts, maximiser la résistance, ...).

3) A résoudre des équations différentielles. Les physiciens adorent résoudre des équations où les inconnues sont des fonctions :

$$u(t) + R.C \frac{du}{dt} = U$$

nous on préfère :  $y + RC y' = U$   $R, C, U$  sont des constantes  
 Cette équation intervient dans la charge d'un condensateur

$$\frac{dv}{dt} + av(t) = g$$

nous on préfère :  $v' + av = g$   $a$  et  $g$  sont des constantes  
 Cette équation décrit la vitesse d'un parachutiste

4) Plus tard cette année, nous découvrirons (attention spoiler...) l'intégration où l'on utilisera des primitives (c'est l'opération inverse de la dérivation). Cela permettra de calculer des surfaces délimitées par des courbes, des volumes, ...

Bref cela sert beaucoup.

## V) Ensemble de définition

Lorsque l'on étudie une fonction, on commence par étudier son ensemble de définition, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que l'on a le droit d'utiliser  $\sqrt{x}$  est défini sur  $[0; +\infty[$  par exemple.

Pour ce faire, on regarde ce qui est interdit (division par zéro, racine carrée d'un nombre négatif, ...)

Lorsque l'on veut dériver une fonction, on commence par donner son ensemble de dérivation, c'est-à-dire l'ensemble de définition de la dérivée AVANT de dériver (pour justifier que l'on ait le droit de faire nos calculs).

C'est assez simple, toutes les fonctions que vous connaissez sont dérivables sur leur ensemble de définition SAUF la racine carrée qui est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On pourrait être tenté de dériver au brouillon et de regarder l'ensemble de définition de la dérivée mais cela manque de rigueur. D'une part parce que c'est de la triche, de deux part parce qu'il pourrait survenir des simplifications qui faussent le résultat.

Mais bon, en terminale il suffit de considérer deux cas et de dire :

-s'il y a une racine carrée,  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition moins les valeurs qui annulent cette racine

-s'il n'y a pas de racine carrée,  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition.