

Cours : Les suites

I) Générer une suite

Définition : Une suite est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

L'image de l'entier naturel n par la suite u , notée $u(n)$ ou u_n , est appelée terme d'indice n ou de rang n de la suite.

La suite u est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n) . Les parenthèses sont obligatoires.

Une suite peut être générée automatiquement de deux façons :

Par une relation explicite :

On a alors une formule qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple : prenons la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 3 - \frac{1}{n}$

On a alors : $v_1 = 3 - \frac{1}{1} = 2$; $v_{10} = 3 - \frac{1}{10} = 2,9$; $v_{51} = 3 - \frac{1}{51} = \frac{152}{51}$...

Par une relation de récurrence :

On a alors une formule qui permet de calculer, en connaissant un terme, le terme suivant.

Exemple : prenons la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n - 5$

On a alors : $v_1 = 1$; $v_2 = -3$; $v_3 = -11$ etc...

La relation de récurrence ne permet pas de calculer v_{100} directement, il faudrait calculer tous les termes jusqu'à v_{99} pour le trouver.

Une suite peut être générée des deux façons, ainsi la suite des nombres pairs peut s'écrire :

" $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n$ " ou bien " $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2$ "

La relation explicite permet des calculs plus rapides.

Dans les problèmes concrets, on trouve en général une relation de récurrence ; tout l'intérêt sera alors de déterminer une relation explicite pour faciliter les calculs. Nous allons voir deux cas particuliers de suites définies par récurrence dont on peut trouver une relation explicite.

II) Suites arithmétiques

Définition :

Une suite (u_n) est dite arithmétique si il existe un nombre réel r tel que $u_{n+1} = u_n + r$

Ce réel r est appelé la raison de cette suite.

Propriété :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p)r$

En particulier, si $p = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

Démonstration admise

Somme des entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

$$\begin{array}{rcl}
 & S = & 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\
 + & S = & n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\
 \hline
 \text{Donc} & 2S = & (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\
 & 2S = & n(n+1) \\
 & S = & n(n+1)/2
 \end{array}$$

Somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Démonstration : vue en cours

III) Suites géométriques

Définition :

Une suite (u_n) est dite géométrique si il existe un nombre réel r tel que $u_{n+1} = r \times u_n$
 Ce réel r est appelé la raison de cette suite.

Propriété :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p \times q^{(n-p)}$
 En particulier, si $p=0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$

Démonstration : vue en cours

Somme des puissances :

$$\text{Si } q \text{ est différent de } 1 \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \text{ en multipliant par } q, \quad qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1} \text{ et donc } S - qS = 1 - q^{n+1}$$

$$\text{et finalement, car } 1 - q \neq 0, \quad S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Somme des termes d'une suite géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 \times (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

Démonstration : vue en cours