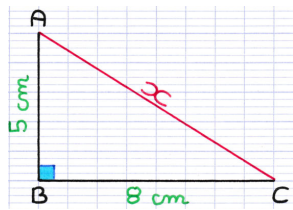


Chapitre 2 : Geometrie plane

Prélude : Rédaction d'un exercice

Lorsque vous faites un exercice, trouver la solution ne suffit pas. Il faut aussi l'expliquer, convaincre la personne qui vous lit de la justesse de votre raisonnement.

Ainsi, cette rédaction n'est pas bonne :



x vaut environ 9,43 cm

D'où vient la réponse ? Quel théorème a été utilisé ? Avait-on le droit de l'utiliser ?

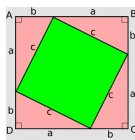
- Essayer de suivre ces étapes :
- 1) données : que sait-on ? Que nous donne l'énoncé ?
 - 2) théorème : quel théorème ou propriété vais-je utiliser ?
 - 3) conclusion : ce que j'ai démontré

I) Pythagore

a) Théorème

Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$

Démonstration :



Résumé rapide

On démontre que la figure verte est un carré.

On calcule l'aire de deux façons différentes

$c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$ et on simplifie

b) Contraposée

Si $BC^2 \neq BA^2 + AC^2$ alors ABC n'est pas rectangle en A.

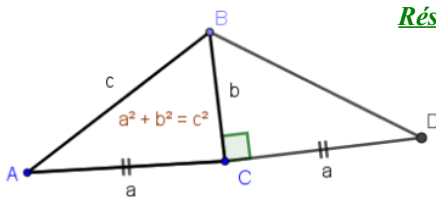
Démonstration :

il n'y a rien à démontrer, c'est une conséquence du théorème

c) Réciproque

Si $BC^2 = BA^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A.

Démonstration :

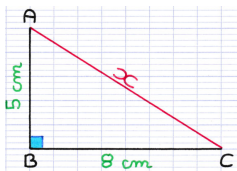


Résumé rapide

On construit D tel que $DC=a$ et (DC) perpendiculaire à (BC)

En utilisant Pythagore, on montre que $BD=c$

Les triangles sont semblables, donc les angles sont égaux deux à deux.



1) ABC est rectangle en B

2) D'après le théorème de Pythagore

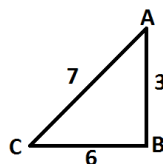
$$3) \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$x^2 = 5^2 + 8^2$$

$$x^2 = 89$$

$$x = \sqrt{89} \approx 9,43$$

L'hypoténuse mesure environ 9,43 cm



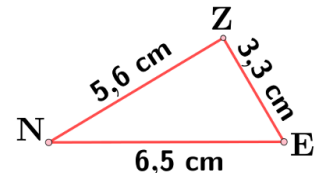
$$1) \quad 7^2 = 49$$

$$6^2 + 3^2 = 45$$

$$\text{donc } 7^2 \neq 6^2 + 3^2$$

2) D'après la contraposée du théorème de Pythagore

3) ABC n'est pas rectangle



$$1) \quad 6,5^2 = 42,25$$

$$5,6^2 + 3,3^2 = 42,25$$

$$\text{donc } 6,5^2 = 5,6^2 + 3,3^2$$

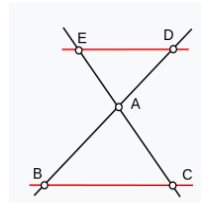
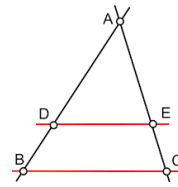
2) D'après la réciproque du théorème de Pythagore

3) NEZ est rectangle en Z



II) Thalès

Soient A,D,B et A,E,C alignés dans l'une de ces configurations.



a) Théorème

$$\text{Si } (DE) \parallel (CB) \text{ alors } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

Démonstration : admise

b) Contraposée

$$\text{Si } \frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE} \neq \frac{BC}{DE} \text{ alors } (DE) \not\parallel (BC)$$

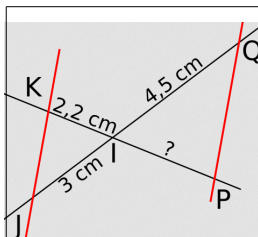
Remarque : il suffit de calculer deux quotients.

c) Réciproque

$$\text{Si } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \text{ alors } (DE) \parallel (CB).$$

Démonstration : admise

Remarque : il suffit de calculer deux quotients.



Avec (KJ) // (PQ)

1) On sait que (KJ) et (PQ) sont parallèles

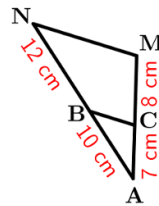
2) D'après le théorème de Thalès

$$3) \frac{PI}{KI} = \frac{QI}{JI} = \frac{PQ}{KJ}$$

$$\frac{PI}{2,2} = \frac{4,5}{3}$$

$$PI = 2,2 \times 1,5 = 3,3$$

PI mesure 3,3 cm.



Est-ce que (MN) // (CB) ?

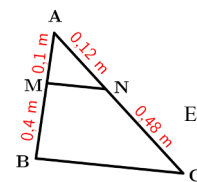
$$1) \frac{AN}{AB} = \frac{22}{10} = 2,2$$

$$\frac{AM}{AC} = \frac{15}{7} \approx 2,14$$

$$\text{donc } \frac{AN}{AB} \neq \frac{AM}{AC}$$

2) D'après la contraposée du théorème de Thalès

3) (MN) et (CB) ne sont pas parallèles.



Est-ce que (MN) // (CB) ?

$$1) \frac{AC}{AN} = \frac{0,6}{0,12} = 5$$

$$\frac{AB}{AM} = \frac{0,5}{0,1} = 5$$

$$\text{donc } \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$$

2) D'après la réciproque du théorème de Thalès

3) (MN) et (CB) sont parallèles.



III) Calcul avec des angles

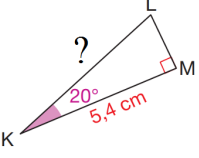
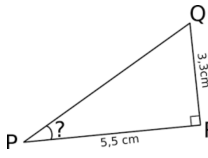
a) Trigonométrie

Uniquement dans un triangle rectangle, nous avons trois formules CAH SOH TOA

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

 1) KLM est rectangle en M 2) $\cos(20) = \frac{5,4}{LK}$ 3) $LK = \frac{5,4}{\cos(20)} \approx 5,75$	 QRP rectangle en R $\tan(\alpha) = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ $\tan(\alpha) = \frac{3,3}{5,5}$ $\alpha = \arctan\left(\frac{3,3}{5,5}\right) \approx 31^\circ$
---	--

Propriété :

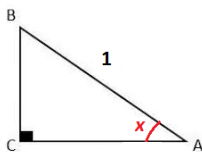
Pour tout angle aigu x ,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\text{ou } \cos^2(x) = (\cos(x))^2$$

Démonstration : Vous devez penser à Pythagore en voyant cette égalité, 1 serait alors l'hypoténuse.

Traçons un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 1 et l'un des angles aigus vaut x .



Nous avons alors $AC = \cos(x)$ et $BC = \sin(x)$.

En appliquant le théorème de pythagore, nous obtenons l'égalité :

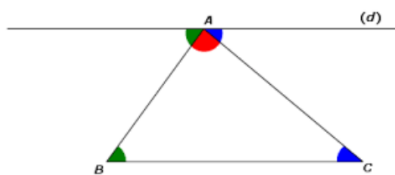
$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

En remplaçant $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1^2$

Propriété :

Dans un triangle, la somme des angles vaut toujours 180° .

Démonstration :



Dans un triangle ABC

On trace la parallèle à (BC) passant par A.

En appelant I le milieu de [AC], on remarque que les angles bleus sont symétriques par rapport à I (et donc égaux) car les droites sont parallèles.

En appelant J le milieu de [AB], on remarque que les angles verts sont symétriques par rapport à J (et donc égaux) car les droites sont parallèles.

Finalement, les trois angles du triangles sont supplémentaires, collés ensemble ils forment un angle plat, on en conclut que la somme de ses trois angles vaut 180° .

Propriété :

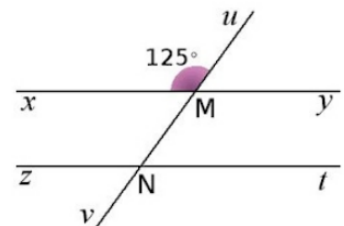
Si deux droites parallèles sont coupées par une troisième, les angles alternes-internes sont égaux. Il en va de même pour les angles correspondants.

Démonstration :

On appelle I le milieu du segment [MN].

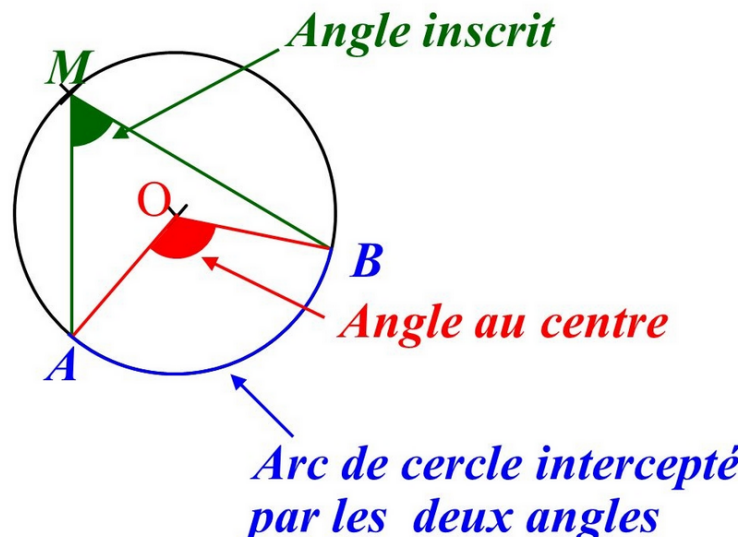
Puisque les droites sont parallèles, les angles alternes-internes sont symétriques et par conséquent, égaux.

En rappelant que les angles opposés par le sommet sont égaux, on montre que les angles correspondants sont égaux.



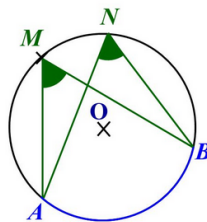
IV) Angles inscrits et angles au centre

Vocabulaire



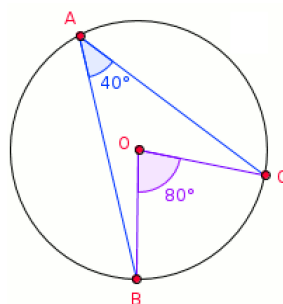
Propriété 1 :

Tous les angles inscrits qui interceptent le même arc de cercle sont égaux.



Propriété 2 :

Si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors la mesure de l'angle au centre est deux fois celle de l'angle inscrit



Propriété 3 :

Si ABC est inscrit dans le cercle de diamètre [AB] alors ABC est rectangle en C

