Cours: Limite d'une suite

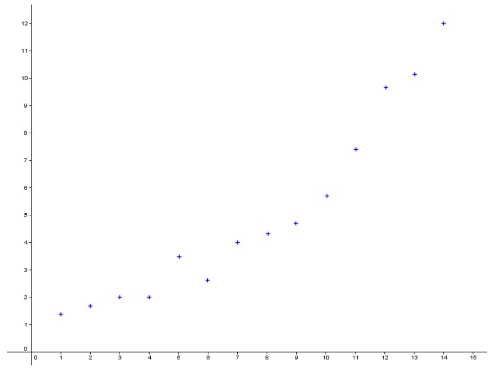
I) Limite d'une suite

En observant les termes de différentes suites, on se rend compte qu'elles peuvent se comporter de trois façons différentes :

- ils sont de plus en plus grand (ou de plus en plus petit) *on parle de limite infinie*
- ils se rapprochent d'un nombre fixe *on parle de limite finie*
- ils font n'importe quoi *on dit que la suite n'a pas de limite*

a) Limite infinie

Définition: On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers l'infini si pour tout réel M, on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à M.



On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

On peut noter cette définition ainsi :

$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \geqslant n_0 \ , \ u_p \geqslant M$$

Exemple :

Considérons la suite $u_n = 9n$. On conjecture aisément sa limite mais montrons le rigoureusement.

Soit $M \in \mathbb{R}$. Notons n_0 le plus petit entier supérieur à $\frac{M}{9}$.

Soit un entier p tel que $p \geqslant n_0$

Nous avons $p \geqslant n_0 \geqslant \frac{M}{9}$ donc $p \geqslant \frac{M}{9}$ d'où $9p \geqslant M$ i.e. $u_p \geqslant M$

Nous avons montrer que $\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \geqslant n_0 \ , \ u_p \geqslant M$ ce qui, par définition, signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

On ne s'inquiète pas, vous ne serez pas amener à faire cela à chaque fois. Nous nous contenterons d'utiliser des limites de référence.

Suites de référence

Soit *k* un réel positif.

$$\forall p \in \mathbb{N}^* , \ \lim_{n\to+\infty} k\,n^p = +\infty \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* , \ \lim_{n\to+\infty} k\sqrt{n} = +\infty$$

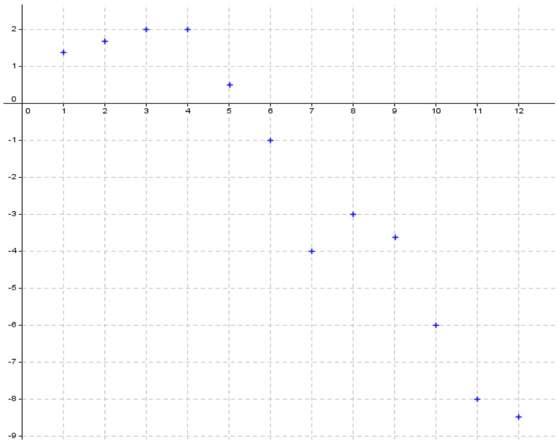
Démonstration: Admise

Définition: On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers l'infini si pour tout réel M, on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont inférieurs à M.

On note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On peut noter cette définition ainsi :

$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \geqslant n_0 \ , \ u_p \leqslant M$



Suites de référence

Soit *k* un réel positif.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} -k n^p = -\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} -k\sqrt{n} = -\infty$

Démonstration: Admise

b) Limite finie

Définition: On dit que la suite (u_n) a pour limite 0 quand n tend vers l'infini si pour tout réel strictement positif ε , on peut trouver un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n sont dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$

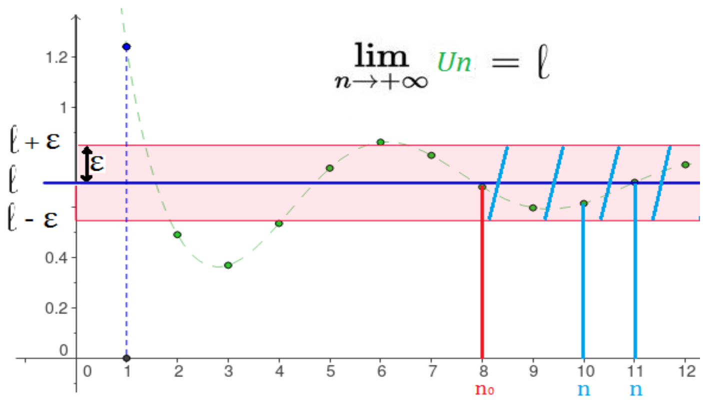
On note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

On peut noter cette définition ainsi : $\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \geqslant n_0 \ , \ -\varepsilon \leqslant u_p \leqslant \varepsilon$

Définition : On dit que la suite (u_n) a pour limite *l* quand n tend vers l'infini si la suite (u_n -*l*) a pour limite 0 quand n tend vers l'infini.

On note : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

On peut noter cette définition par : $\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall p \geqslant n_0 \ , \ -\varepsilon \leqslant u_p - l \leqslant \varepsilon$



Suites de référence

Soit *k* un réel.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} \frac{k}{n^p} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0$

Démonstration: Admise

c) Pas de limite

Certaines suites n'ont pas de limite, par exemple la suite $u_n=(-1)^n$ ou encore la suite $v_n=\cos(n)$.

Remarques :

1) On dit d'une suite (u_n) admettant une limite finie qu'elle est **convergente**.
Et on dit qu'elle est **divergente** dans le cas contraire (limite infinie ou pas de limite)

2) La limite d'une suite convergente est **unique**.

3) On dit qu'une suite est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

II) Opérations sur les limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) et leurs limites.
Soient a et b deux réels.

Somme (propriétés admises)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=$	a+b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F I**

F I signifie forme indéterminée, on ne peut pas conclure directement, il faut transformer l'expression pour enlever l'indétermination.

Par exemple : *(Ici, on lève l'indétermination en réduisant l'expression)*

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-n=+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n-2n=-\infty$,et $\lim\limits_{n\to+\infty} n-n=0$

Produit (propriétés admises)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	a	$a\neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	b	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n=$	$a\times b$	∞	∞	**F I**

Pour trouver le signe, on utilise la règle des signes. Par exemple, si la limite de (u_n) est -2 et la limite de (v_n) est $-\infty$ alors la limite du produit de (u_n) et (v_n) est $+\infty$

F I signifie forme indéterminée, on ne peut pas conclure directement, il faut transformer l'expression pour enlever l'indétermination.

Par exemple :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\times\frac{1}{n}=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\times\frac{1}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\times\frac{17}{n}=17$

Quotient (propriétés admises)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$	a	a	∞	a	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$	$b\neq0$	∞	$b\neq0$	0	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}=$	$\frac{a}{b}$	0	∞	∞	**F I**	**F I**

Pour trouver le signe, on utilise la règle des signes.
Lorsque la limite de (v_n) est zéro, il faudra déterminer le signe des valeurs de *v* pour pouvoir conclure sur le signe du résultat .

Par exemple : $$\lim_{n\to+\infty}\frac{-5-n^2}{\frac{-1}{n}}=+\infty$$

F I signifie forme indéterminée, on ne peut pas conclure directement, il faut transformer l'expression pour enlever l'indétermination.

Par exemple :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n}=+\infty \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{17n}{n}=17$$

III) Théorèmes

Si on ne peut pas conclure directement avec les théorèmes d'opérations (et ce sera souvent le cas), il faudra réfléchir.

Théorèmes de convergence

Si une suite est croissante et majorée alors cette suite converge.
Si une suite est décroissante et minorée alors cette suite converge.

Démonstration admise (se fait par l'absurde)

Ces théorèmes permettent de prouver la convergence d'une suite mais ne donne pas sa limite.

Propriété

Si une suite est majorée par *M* et converge vers le réel *l* alors $M\geqslant l$
Si une suite est minorée par *m* et converge vers le réel *l* alors $m\leqslant l$

Démonstration admise (se fait par l'absurde)

Propriété

Si une suite est croissante et converge vers un réel *l* alors $u_n\leqslant l$ pour tout entier *n*

Démonstration admise

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ *donc* $\forall M \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall p \geqslant n_0\ ,\ u_p \geqslant M$

Montrons que la limite de (v_n) *est* $+\infty$

Soit un réel M.

Il existe un entier n_0 *tel que pour tout entier p supérieur à* n_0 *,* $u_p \geqslant M$ *. Appelons* n_1 *le rang à partir duquel* $u_n \leqslant v_n$ *. Posons* n_2 *le plus grand de* n_0 *et* n_1 *.*

Soit un entier p supérieur à n_2 *.*

Nous avons $u_p \geqslant M$ *(car* $p \geqslant n_2 \geqslant n_0$ *) et* $u_p \leqslant v_p$ *(car* $p \geqslant n_2 \geqslant n_1$ *), donc* $v_p \geqslant u_p \geqslant M$

ainsi $\forall M \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ /\ \forall p \geqslant n_2\ ,\ v_p \geqslant M$ *c'est-à-dire* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Théorème des gendarmes

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et *l* un réel.

Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

Démonstration (vue en cours)

IV) Limite de (q^n)

Inégalité de Bernoulli

$$\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

Démonstration exigible

Soit un réel a > 0. Montrons par récurrence sur *n* que $(1+a)^n \geqslant 1+na$

Initialisation : Pour *n* = 0, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc $(1+a)^0 \geqslant 0 \times a$

C'est la propriété au rang *n* = 0

Hérédité : Soit un entier naturel *p*.

On suppose que $(1+a)^p \geqslant 1 + pa$ Montrons la propriété au rang *p+1*

$(1+a)^p \geqslant 1 + pa$

$(1+a)^p \times (1+a) \geqslant (1+pa) \times (1+a)$ car *1 + a* est positif

$(1+a)^{p+1} \geqslant 1 + pa + a + pa^2$

$(1+a)^{p+1} \geqslant 1 + (p+1)a + pa^2 \geqslant 1 + (p+1)a$ car $pa^2 \geqslant 0$

finalement $(1+a)^{p+1} \geqslant 1 + (p+1)a$

C'est la propriété au rang *p+1*

Conclusion :

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc, par récurrence, vraie pour tout entier naturel *n*

Propriété Soit un réel q.

Si	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
Alors	q^n n'a pas de limite	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

On admet les 2 premiers, pour le troisième la suite est constante donc le résultat est évident.

Démonstration du 4. exigible

Soit un réel q > 1.

Posons $a = q - 1$. Donc $a > 0$ et de plus $q = 1 + a$

Nous savons d'après l'inégalité de Bernoulli que pour tout entier naturel n,

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na$$

Or on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+a)^n = +\infty$

V) Quelques méthodes

Méthode 1:

Pour lever une indétermination avec une suite contenant des puissances de n, racine de n, des divisions, ... :

- on peut factoriser par la plus gande puissance de n : $\dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + n}$

- on peut essayer de simplifier le calcul : $v_n = \dfrac{1}{n}(3n + 1 - \dfrac{1}{n}) = 3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$

Méthode 2:

Si la suite contient des fonctions que l'on peut difficilement factoriser (cos, sin, (-1)^n, etc ...) ou est définie par récurrence :

- On regarde si la suite est monotone et bornée (théorème de convergence)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

- On regarde si la suite peut être comparée à d'autres suites plus simples (théorème de comparaison, gendarmes)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Méthode 3:

Si des racines carrées vous embêtent, il peut être utile d'utiliser la forme conjuguée :

$$v_n = \sqrt{n^2 - 4} - \sqrt{n^2 + 7} = \frac{-11}{\sqrt{n^2 - 4} + \sqrt{n^2 + 7}}$$