Cours : Polynôme du second degré

I) Polynôme

Définition : Un monôme est le produit d'un nombre et d'une puissance de x : $x^2 ; 5x^2 ; -3x^4$

Un polynôme est une somme de monôme : $P(x)=5x^3+2x-4$

Le degré d'un polynôme est la puissance de x la plus élevée sous sa forme développée.

Un polynôme peut se présenter sous plusieurs formes :

- forme développée et ordonnée : $P(x)=ax^2+bx+c$
- forme canonique : $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$
- forme factorisée : $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

Propriété : La forme canonique de $P(x)=ax^2+bx+c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ est :

$$P(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Démonstration :

Exemple numérique :

$P(x)=3x^2+5x+7$

$P(x)=3(x^2+\frac{5}{3}x)+7$

$P(x)=3(x^2+\frac{5}{3}x+(\frac{5}{2\times3})^2-(\frac{5}{2\times3})^2)+7$

$P(x)=3((x+\frac{5}{6})^2-\frac{25}{36})+7$

$P(x)=3(x+\frac{5}{6})^2-3\times\frac{25}{36}+7$

$P(x)=3(x+\frac{5}{6})^2+\frac{59}{12}$

Cas général :

$P(x)=ax^2+bx+c$

$P(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$

$P(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2)+c$

$P(x)=a((x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2)+c$

$P(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2-a\times(\frac{b}{2a})^2+c$

$P(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c$

$P(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

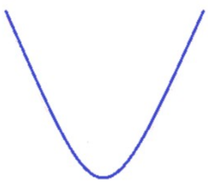
Propriété :

Si $P(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec a non nul, la courbe de P est une parabole de sommet $S(\alpha,\beta)$.

Propriété admise

Remarque : Toute parabole admet un axe de symétrie verticale passant par son sommet.

II) Variations



Parabole tournée vers le haut

Si a > 0, c'est un bol

Parabole tournée vers le bas

Si a < 0, c'est un chapeau

III) Racines d'un polynôme

Définition : Une racine d'un polynôme est une valeur de x qui annule ce polynôme.

Exemple : 5 est racine du polynôme $P(x)=7(x-5)(2x+5)$ *car* $P(5)=0$

Trouver les racines d'un polynômes revient donc à résoudre l'équation :

$$P(x)=0$$

Propriété : Les polynômes du premier degré ont une et une seule racine.

Démonstration : Les polynômes du premier degré sont de la forme :

$$P(x)=ax+b \text{ où } a\neq 0$$

Pour trouver les racines, on résout $P(x)=0$ *c'est-à-dire* $ax+b=0$
C'est une équation du premier degré que l'on résout :

$$ax+b=0$$
$$ax=-b$$
$$x=-\frac{b}{a}$$

On peut diviser par a car il est non nul !

On a bien trouvé une racine et il n'y en a qu'une.

Définition : Dans la forme canonique générale d'un polynôme, on peut distinguer (discriminer) différents cas selon le signe de l'expression b^2-4ac . On appellera cette expression le discriminant du polynôme et on le notera avec le symbole delta :

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

Propriété :

Si $\Delta<0$ alors il n'y a pas de racine.

Si $\Delta=0$ alors il y a une racine double $x=\frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta=0$ alors il y a deux racines données par les formules :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration : Faites dans l'activité

Application : Résolvez l'équation du second degré suivante :

$$3x^2-x-4=0$$

On a $\Delta=b^2-4ac$ donc $\Delta=(-1)^2-4\times3\times(-4)=49$

Comme le discriminant est positif, il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{49}}{2\times3}=\frac{4}{3} \quad ; \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{49}}{2\times3}=-1$$

L'ensemble des solutions de cette équation est $\boxed{S=\{-1;\frac{4}{3}\}}$