

Chapitre 4 : Vecteurs

I) Vecteurs de l'espace

Nous allons étendre ce que vous savez des vecteurs, que vous avez définis et utilisés dans le plan, à l'espace.

Vecteurs :

A tout couple (A;B) de points de l'espace, on associe le vecteur \vec{AB} .

La translation de vecteur \vec{AB} est la transformation qui transforme A en $A + \vec{AB}$.

Lorsque A=B, le vecteur \vec{AA} est le vecteur nul.

La norme de \vec{AB} est la distance AB.

Toutes les règles de calcul vues dans le plan s'étendent à l'espace : règle du parallélogramme, relation de Chasles, somme de vecteurs, produit par un réel, ...

Colinéaires :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Droite :

Soient A, B deux points distincts de l'espace.

(AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AM} sont colinéaires.

On dit que \vec{AB} est un vecteur directeur de (AB).

N'importe quel vecteur colinéaire à \vec{AB} est également un vecteur directeur de (AB).

Propriété :

$$\forall M \in (AB), \exists ! x \in \mathbb{R} / \vec{AM} = x \vec{AB}$$

Démonstration :

Existence : Soit M un point de (AB). Par définition, \vec{AB} et \vec{AM} sont colinéaires.

Par définition de la colinéarité, il existe un réel x tel que

$$\vec{AM} = x \vec{AB}$$

Unicité : Soient deux réels x, x' tels que $\vec{AM} = x \vec{AB}$ et $\vec{AM} = x' \vec{AB}$

$$\text{Donc } \vec{AM} - \vec{AM} = x \vec{AB} - x' \vec{AB}$$

$$\text{i.e } \vec{0} = (x - x') \vec{AB}$$

Comme A et B sont distincts, \vec{AB} n'est pas le vecteur nul ce qui implique que $x - x' = 0$

Enfinement $x = x'$.

II) Plan de l'espace

Repère du plan :

Un repère d'un plan P est défini par $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où O est l'origine du repère, \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non-colinéaires.

Propriété : $\forall M \in P, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Démonstration :

Existence : Soit M un point de P.

Posons I et J les points de P tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

La parallèle à (OI) passant par M coupe (OJ) en M' (sinon (OI) et (OJ) seraient //)

$M' \in (OJ)$ donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM'} = y\overrightarrow{OJ}$

La parallèle à (OJ) passant par M coupe (OI) en M'' (sinon (OI) et (OJ) seraient //)

$M'' \in (OI)$ donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM''} = x\overrightarrow{OI}$

Comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Unicité : Soient deux couples de réels (x, y) et (x', y') tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

$$(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$$

Si $x \neq x'$ alors $\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\vec{j}$ et les deux vecteurs sont colinéaires or ils ne le sont pas. C'est impossible.

Si $x = x'$ alors $\vec{0} = (y' - y)\vec{j}$ et $\vec{0} = y' - y$ (car \vec{j} ne peut pas être le vecteur nul)

Donc $y = y'$

Cette propriété nous permet de donner une définition d'un plan plus rigoureuse :

(ABC) est l'ensemble des points M tels que $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

On dit que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont des vecteurs directeurs du plan P.

Propriété :

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèles.

Démonstration : admise

Vecteurs coplanaires :

Soit un point A de l'espace.

On dira que des vecteurs sont coplanaires si A et tous les points obtenus par translation de A en suivant ces différents vecteurs appartiennent à un même plan.

Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

Propriété :

\vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Démonstration : admise

On dit que \vec{w} est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v}

III) Bases de vecteurs dans l'espace

Vecteurs coplanaires :

Trois vecteurs sont dits coplanaires si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres.

Cela signifie qu'ils peuvent être placés dans le même plan.

Bases de vecteurs dans l'espace :

Trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace.

Propriété :

Soient une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un unique triplets de réels (x, y, z) tels que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Démonstration :

admise, elle se fait de la même manière que pour un repère du plan.

Définition :

Soient une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et un point O.

Le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **repère de l'espace**.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplets de réels (x, y, z) tels que :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce que l'on notera $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ce sont les coordonnées du vecteur.

Les formules que vous avez l'habitude d'utiliser se généralise dans l'espace :

calculs vectoriel avec coordonnée, distance entre deux points de l'espace, milieu de deux points de l'espace, etc ...

Distance:

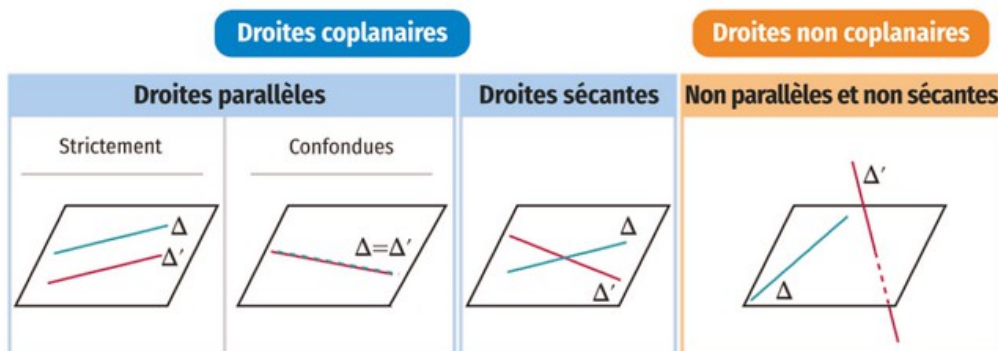
$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Milieu:



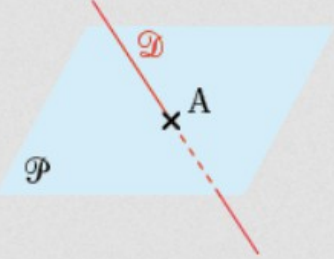
Soit I le milieu de [AB]. $I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

IV) Positions relatives dans l'espace

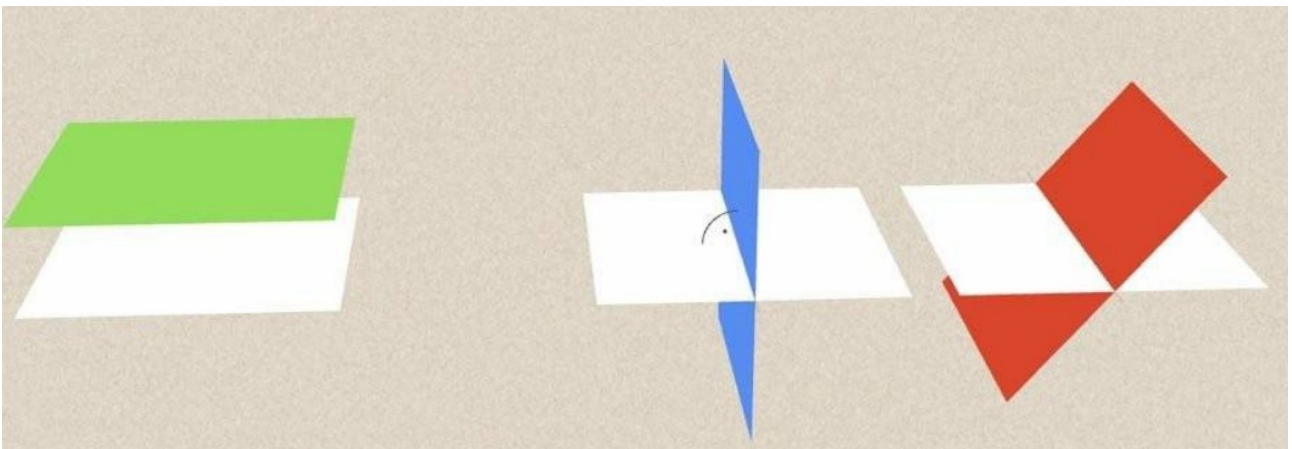
Position relative de deux droites :



Position relative d'une droite et d'un plan :

\mathcal{D} parallèle à \mathcal{P}		\mathcal{D} et \mathcal{P} sécants
strictement parallèles	$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$	
		
Aucun point commun	Points communs : \mathcal{D}	Un unique point commun

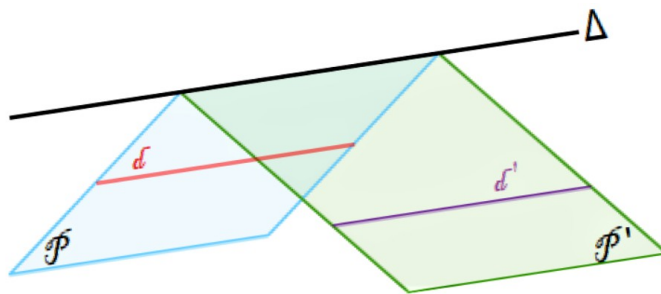
Position relative de deux plans :



Théorème du toit :

Soient deux plans sécants \mathcal{P} et \mathcal{P}' ainsi que deux droites d et d' appartenant à ces deux plans. Notons Δ l'intersection de ces deux plans.

Si d et d' sont parallèles alors Δ est parallèle à d et d' .

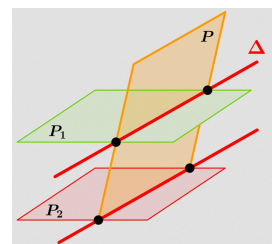


Position relative de trois plans :

Soient deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' parallèles.

Tout plan sécant avec \mathcal{P} est aussi sécant avec \mathcal{P}' .

Les droites d'intersections (notée d et d') sont parallèles entre elles.



Sources

deux droites : <https://aufutur.fr/revisions/mathematiques/etudier-position-relative-droites-et-plans/>

plan-droites : https://www.annabac.com/modules-assets/images/PB_Bac_06468_MathT_gene/PB_Bac_06468_MathT_gene_p033-056_C02_Tab_1.png

deux plans : https://www.mozaweb.com/fr/mozaik3D/MAT/geometria/terelemek_helyzete/960.jpg

thm toit : https://mathsmagiques.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/05/ch11_ts2_exo36-39-44-45-47p278-280_cor_19-20-1.pdf

3 plans : <https://jaicompris.com/lycee/math/espace/positionrelative/planplanparallelecoupe.png>