Chapitre 4 : Fonctions

Si depuis l'antiquité, on manipule des formules, on utilise des tables de valeurs permettant d'établir des relations entre quantités ; ce n'est qu'au 17ème siècle que Leibniz introduit le terme de fonction pour étudier cette relation en elle-même. Euler, Newton et beaucoup d'autres étudieront alors ce nouveau concept. Au 18ème, Dirichlet formalise la notation pour devenir celle que l'on utilise aujourd'hui.
La notion de fonction est donc une notion plutôt récente. Si le théorème de Pythagore a plusieurs milliers d'années, l'étude des fonctions a à peine 200 ans.

Le symbole $\forall$ se lit pour tout (ou quelque soit).

I) Définition

Fonction : Soit D un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$.
Une **fonction** à valeurs réelles *f* définie sur D est un procédé qui à tout réel *x* de D associe un unique réel noté $f(x)$.
D est appelé l'ensemble de définition de *f* .

On peut noter la fonction $f(x)=x^2$ *qui se lit "f de x égal x au carré"*
ou encore $f : x \rightarrow x^2$ *qui se lit "la fonction f qui à x associe x au carré"*
ou encore $f : y=x^2$ *qui se lit "la fonction f : y=x²"*

Le nombre *x* de D est appelé **antécédent**, le réel $f(x)$ est appelé **image**.

Courbe : Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées (x,f(x)) tels que $x \in D$
Par définition, nous placerons donc les antécédents sur l'axe des abscisses et les images sur l'axe des ordonnées.

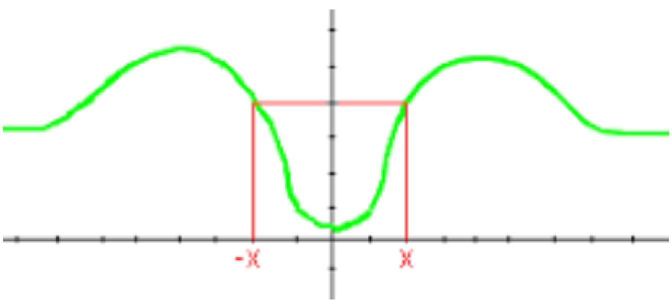
Fonction paire : On dit qu'une fonction est paire si :

$$\forall x \in D, f(-x)=f(x)$$

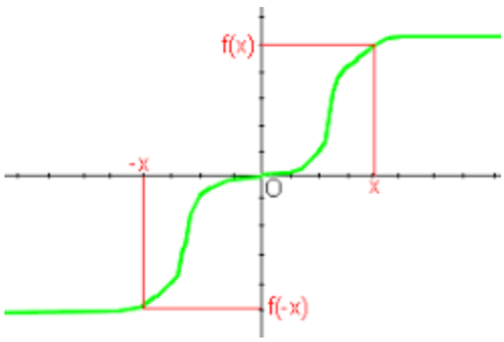
Fonction impaire : On dit qu'une fonction est impaire si :

$$\forall x \in D, f(-x)=-f(x)$$

Remarques : 1) L'ensemble D doit être centré en 0, c'est-à-dire que si un nombre est dans D, son opposé y est également.
2) Les courbes des fonctions paires sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, les courbes des fonctions impaires sont symétriques par rapport à l'origine.



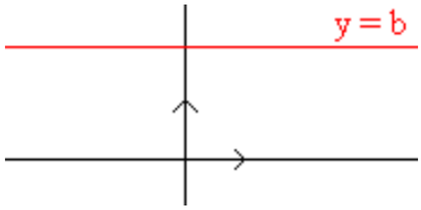
fonction paire



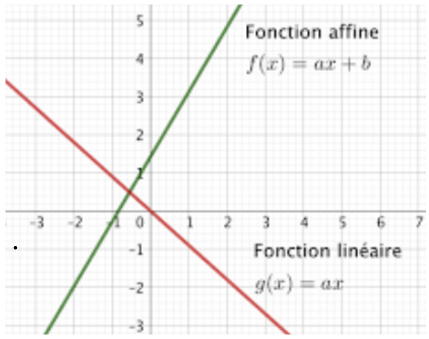
fonction impaire

II) Fonctions de référence

Vous devez connaître les courbes de certaines fonctions par coeur, cela vous permettra d'identifier, dans une situation donnée, le type de fonction à utiliser.
On se place dans un repère orthonormé.



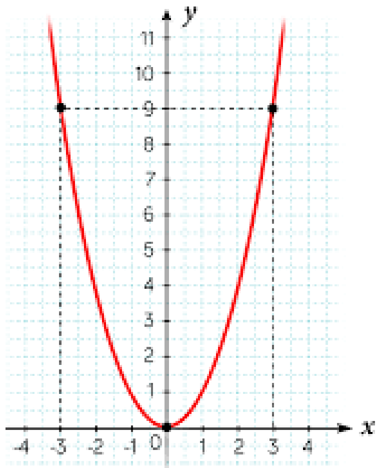
Fonction constante : Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=b$, où $b \in \mathbb{R}$.
Courbe : C'est une droite horizontale



Fonction linéaire : Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax$, où $a \in \mathbb{R}$.
Courbe : C'est une droite passant par l'origine de coefficient directeur *a*.

Fonction affine : Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
Courbe : C'est une droite passant par le point (0,*b*) et de coefficient directeur *a*.

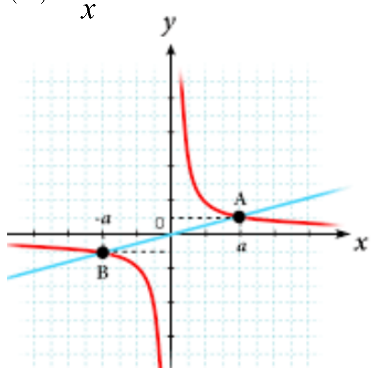
Remarques : - Une droite verticale ne peut pas être la courbe d'une fonction, puisqu'à une seule valeur de *x* correspondrait une infinité d'images.
- Les fonctions constantes et linéaires sont des fonctions affines
- Les fonctions linéaires décrivent les situations de proportionnalité et réciproquement.



Fonction carrée : Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Courbe : C'est une parabole. Son sommet est le point O.
Remarques : - Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$, la fonction carrée est paire. Sa parabole est donc symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=x^2 \geqslant 0$, la parabole de la fonction carrée est donc au-dessus de l'axe des abscisses.

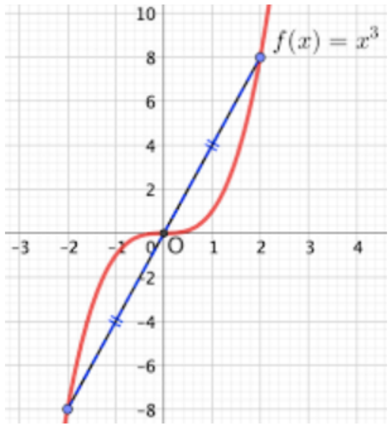
Fonction inverse : Elle est définie sur $\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Courbe : C'est une hyperbole de centre le point O.
Remarques : - Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$,
la fonction inverse est impaire, sa courbe est donc symétrique par rapport à O.

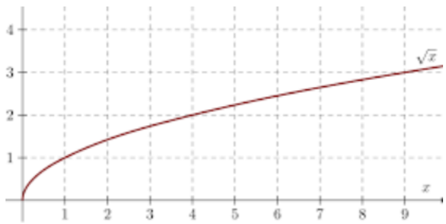


Fonction cube : Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

Remarques : - Puisque $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$, la fonction cube est impaire, sa courbe est donc symétrique par rapport à O.



Fonction racine carrée : Elle est définie sur $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

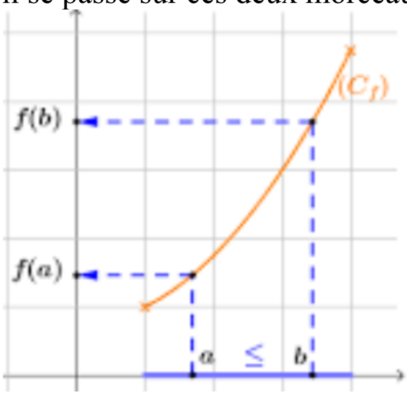


En observant ces courbes, on peut essayer de décrire leurs allures, si elles "montent" ou "descendent" par exemple. C'est l'objet de la dernière partie.

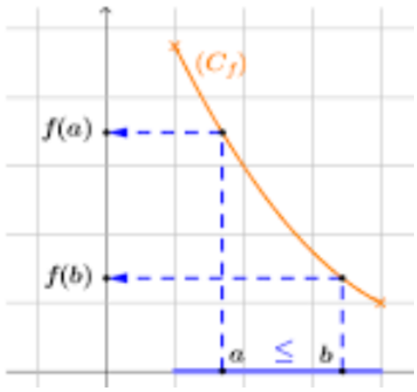
III) Fonctions de référence et comparaison

a) Inégalité et fonctions de référence

Observons ce qu'il se passe sur ces deux morceaux de courbes :



Lorsque la courbe monte :
$a\leqslant b\Leftrightarrow f(a)\leqslant f(b)$



Lorsque la courbe descend :
$a\leqslant b\Leftrightarrow f(a)\geqslant f(b)$

Les courbes qui montent conservent le sens de l'inégalité, ainsi les fonctions cube, racine carrée et carrée sur $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$ conservent les inégalités.

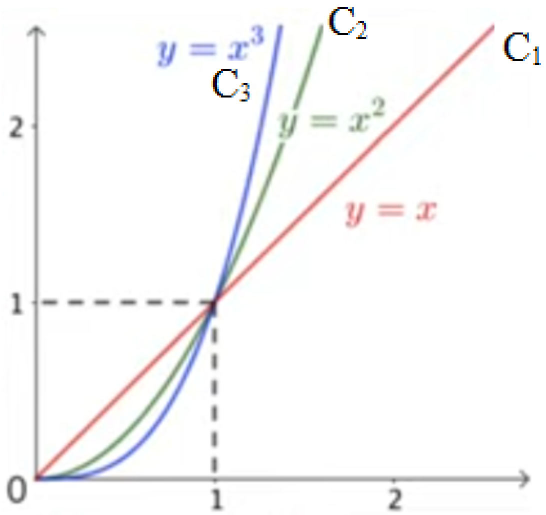
$\boxed{\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b\Rightarrow a^3<b^3}$ $\boxed{\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b\Rightarrow\sqrt{a}<\sqrt{b}}$ $\boxed{\forall a,b\in\mathbb{R}^+, a<b\Rightarrow a^2<b^2}$

Les courbes qui descendent inversent le sens de l'inégalité, ainsi les fonctions inverse sur $]0;+\infty[$, inverse sur $]-\infty;0[$ et carrée sur $\mathbb{R}^-=]-\infty;0]$ inversent les inégalités.

$\boxed{\forall a,b\in]-\infty;0[, a<b\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}}$ $\boxed{\forall a,b\in]0;+\infty[, a<b\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}}$

$\boxed{\forall a,b\in]-\infty;0[, a<b\Rightarrow a^2>b^2}$

b) Positions relatives des courbes sur $\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$



Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, les courbes sont dans l'ordre de leurs puissances. C_1 est en-dessous de C_2, elle -même en-dessous de C_3.

Ainsi $\boxed{\forall x \in [1\,;+\infty[\ ,\ x \leqslant x^2 \leqslant x^3}$

Sur l'intervalle $[0\,;1[$, les courbes sont dans l'ordre inverse de leurs puissances. C_3 est en-dessous de C_2, elle -même en-dessous de C_1.

Ainsi $\boxed{\forall x \in [0\,;1]\ ,\ x \geqslant x^2 \geqslant x^3}$

Démonstration :

Sur l'intervalle [0;1]

Soit $x \in [0\,;1]$ *, donc* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *Multiplions par x>0*

$0 \leqslant x^2 \leqslant x$ *et* $\boxed{x \geqslant x^2}$

Remultiplions par x>0, $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2$ *et* $\boxed{x^2 \geqslant x^3}$ *Ainsi* $\boxed{\forall x \in [0\,;1]\ ,\ x \geqslant x^2 \geqslant x^3}$

C_3 est donc en-dessous de C_2, elle -même en-dessous de C_1.

Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

Soit, $x \in [0\,;+\infty[$ *donc* $1 \leqslant x$ *Multiplions par x>0*

$x \leqslant x^2$ *et* $\boxed{x \leqslant x^2}$

Remultiplions par x>0, $x^2 \leqslant x^3$ *et* $\boxed{x^2 \leqslant x^3}$ *Ainsi* $\boxed{\forall x \in [1\,;+\infty[\ ,\ x \leqslant x^2 \leqslant x^3}$

C_1 est en-dessous de C_2, elle -même en-dessous de C_3.