

# Chapitre 5 : Limites de fonctions

Vous avez étudié la limite d'une suite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On peut faire de même avec une fonction où la variable  $n$  est plus entière mais réelle.  $x$  peut alors tendre vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  ou même n'importe quelle valeur réelle.

## I) Limites en l'infini

Lorsque l'on étudie une fonction, on est amené à se demander ce que la courbe va faire lorsque  $x$  est très grand (on dit lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ). C'est le même fonctionnement que pour les suites

### 1er cas : elle va de plus en plus haut

On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et on lit : "la limite de la fonction  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  est plus l'infini.

Cela signifie que pour n'importe quel nombre  $M$  (aussi grand soit-il), l'intervalle  $[M, +\infty[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.

On peut noter cette définition par :  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x \geq x_0, f(x) \geq M$

### 2nd cas : elle va de plus en plus bas

On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Cela signifie que pour n'importe quel nombre  $m$  (aussi petit soit-il), l'intervalle  $]-\infty, m]$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.

On peut noter cette définition par :  $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x \geq x_0, f(x) \leq m$

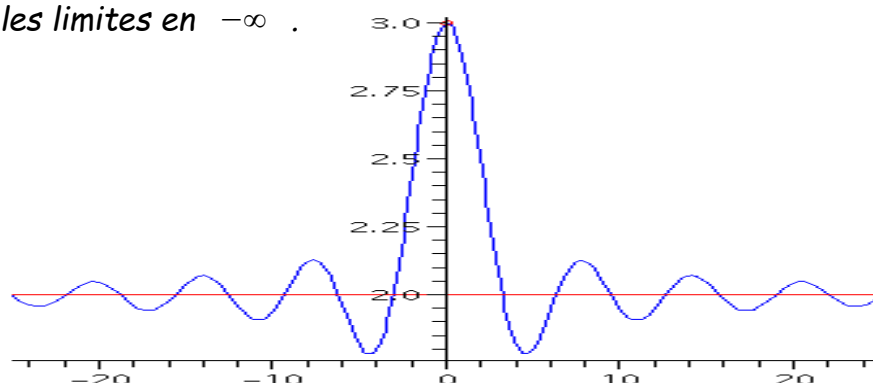
### 3ème cas : elle stagne vers un réel $a$

On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  et on lit : "la limite de la fonction  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  est le réel  $a$ . On dit que la droite d'équation  $y = a$  est une asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$ .

Cela signifie que pour n'importe quel distance  $\varepsilon$  (aussi proche de zéro soit-elle), l'intervalle  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  contient toutes les valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.

**Remarque :** Les asymptotes permettent de visualiser le tracé de la courbe.

Nous venons de voir les limites en  $+\infty$ , on peut évidemment étudier de la même manière les limites en  $-\infty$ .



## II) Limites de référence

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{si } n \text{ est pair, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \\ \text{si } n \text{ est impair, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \end{cases}$$

Propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Propriété :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

## III) Limites en un point

La plupart du temps, lorsque  $x$  tend vers une valeur réelle  $a$ , la fonction tend vers  $f(a)$ .

$$\text{i.e. } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Mais un problème se pose pour les valeurs interdites, en effet  $f(a)$  n'est alors pas défini.

Exemple :  $f(x) = \frac{1}{x}$

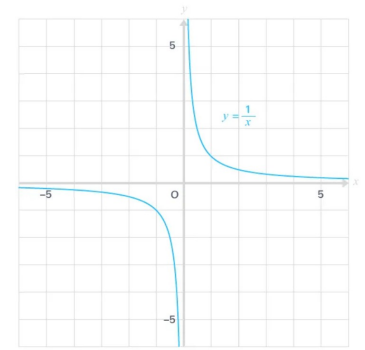
- si on s'approche de zéro par la droite,  $x$  est positif, on note  $x \rightarrow 0^+$ , la limite sera  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

- si on s'approche de zéro par la gauche,  $x$  est négatif, on note  $x \rightarrow 0^-$ , la limite sera  $-\infty$ .

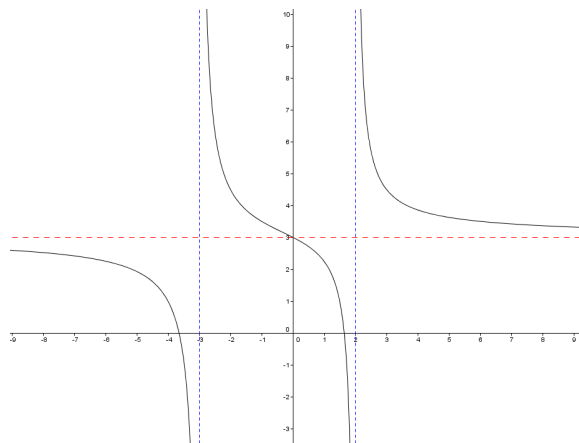
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

La courbe  $C_f$  se rapproche alors de la droite d'équation  $x=0$ , on parle d'asymptote verticale.



Exemple :

$$f(x) = \frac{3x}{(x+3)(x-2)}$$



## IV) Opérations sur les limites

Comme pour les suites, on peut déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de fonctions. Attention aux formes indéterminées :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$$
$$0^0, \infty^0, 1^\infty$$



C'est un mémo, si vous écrivez ça un zombie mangera un enfant quelque part.

### Comment lever une indétermination ?

On peut essayer de :  
simplifier  
factoriser (polynômes)  
utiliser la forme conjuguée (racine carrée)  
comparer avec une autre fonction (voir partie V)

## V) Limites et comparaisons

Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions.

### Théorème de comparaison

Si, pour  $x$  suffisamment grand,  $f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

#### Démonstration

Soit un réel  $M$ .

Il existe un réel  $x_0$  tel que pour tout réel  $x$  supérieur à  $x_0$ ,  $g(x) \geq M$ .

Soit  $x_1$  un réel à partir duquel  $f(x) \geq g(x)$ . Posons  $x_2$  le plus grand de  $x_0$  et  $x_1$ .

Soit un entier  $x$  supérieur à  $x_2$ .

Nous avons  $g(x) \geq M$  (car  $x \geq x_2 \geq x_0$ ) et  $f(x) \geq g(x)$  (car  $x \geq x_2 \geq x_1$ ), donc

$$f(x) \geq g(x) \geq M$$

ainsi  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R} / \forall x \geq x_2, f(x) \geq M$  c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### Théorème de comparaison 2

Si, pour  $x$  suffisamment grand,  $f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

Démonstration similaire

### Théorème des gendarmes

Si, pour  $x$  suffisamment grand,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$  alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$$

Démonstration (admise)

Ces trois théorèmes s'étendent aux limites en moins l'infini et en un point en changeant le "x suffisamment grand" par "x suffisamment petit" ou "x suffisamment proche de a"

## VI) Croissances comparées

En résumé, l'exponentielle est plus fort que  $x$ . (lorsque  $x$  est grand)

**Propriété 1:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

*Démonstration*

On montre que  $e^x > \frac{x^2}{2}$  en étudiant la fonction  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

**Propriété 2:**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

*Démonstration*

**Propriété 3:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

*Démonstration*

1) Pour tout nombre réel  $x$ , on pose  $X = -x$ . Ainsi  $x e^x = -X e^{-X} = -\frac{X}{e^{-X}}$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$  donc, d'après la propriété précédente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-X}}{-X} = +\infty$

et par quotient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-X}{e^{-X}} = 0$ .

2) On utilise 1) avec  $X = -x$ .

# Tableaux opérations sur les limites

On considère deux fonctions,  $f$  et  $g$ , et leurs limites (en un même point, en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ ).

Soient  $a$  et  $b$  deux réels.

## Somme

$\lim f$	$a$	$a$	$a$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$b$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim f+g$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>FI</b>

**FI** signifie forme indéterminée, on ne peut pas conclure directement, il faut transformer l'expression pour enlever l'indétermination.

Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x = 0$$

## Produit

$\lim f$	$a$	$a \neq 0$	$\infty$	<b>0</b>
$\lim g$	$b$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\lim f \times g$	$a \times b$	$\infty$	$\infty$	<b>FI</b>

Pour trouver le signe, on utilise la règle des signes. Si la limite de  $f$  est  $-2$  et la limite de  $g$  est  $-\infty$  alors la limite du produit de  $f$  et  $g$  est  $+\infty$ .

**FI** signifie forme indéterminée, on ne peut pas conclure directement, il faut transformer l'expression pour enlever l'indétermination.

Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{17}{x} = 17$$

## Quotient

$\lim f$	$a$	$a$	$\infty$	$a$	<b>0</b>	$\infty$
$\lim g$	$b \neq 0$	$\infty$	$b \neq 0$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{a}{b}$	<b>0</b>	$\infty$	$\infty$	<b>FI</b>	<b>FI</b>

Pour trouver le signe, on utilise la règle des signes.

Lorsque la limite de  $g$  est zéro, il faudra déterminer le signe des valeurs de  $g$  pour pouvoir conclure sur le signe du résultat.

Par exemple :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x} = +\infty$

**FI** signifie forme indéterminée, on ne peut pas conclure directement, il faut

transformer l'expression pour enlever l'indétermination.

Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17x}{x} = 17$$

Composée

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

## Lever une indétermination

**Méthode 1:**

Pour lever une indétermination en l'infini avec une fonction contenant des puissances de  $x$ , racine de  $x$ , des divisions, ... :

- on peut factoriser par la plus grande puissance de  $x$  :

$$f(x) = \frac{x - 2x^3}{5 - x^4} = \frac{\frac{1}{x^2} - 2}{x\left(\frac{5}{x^4} - 1\right)}$$

- on peut essayer de simplifier le calcul :  $f(x) = \frac{1}{x}(3x + 1 - \frac{1}{x}) = 3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

**Méthode 2:**

Si la suite contient des fonctions que l'on peut difficilement factoriser (cos, sin,  $(-1)^n$ , etc ...), on regarde si la suite peut être comparée à d'autres suites plus simples (théorème de comparaison, gendarmes)

**Méthode 3:**

Si des racines carrées vous embêtent, il peut être utile d'utiliser la forme conjuguée :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 + 7} = \frac{-11}{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 7}}$$

**Méthode 4:**

Pour lever une indétermination en un point, on peut penser au taux d'accroissement.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = f'(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = f'(0)$$