Probabilités 2 : Suites et indépendances

Ω est un univers, P est une probabilité sur Ω, A et B sont deux évènements de Ω.

I) Evènements indépendants

Définition :

On dit que A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

Attention à ne pas confondre indépendants et incompatibles (disjoints).

Propriété :

Si $P(A)\neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B)=P(B)$

De même, si $P(B)\neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_B(A)=P(A)$

Démonstration :

Soit A tel que $P(A)\neq 0$ *, A et B sont indépendants si, et seulement si,*

$$
\begin{aligned}
& P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B) \qquad \textit{car} \quad P(A)\neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & P_A(B)=P(B)
\end{aligned}
$$

Fin

Si A et B sont indépendants cela signifie que la réalisation de A n'influe par sur le résultat de B. Par exemple, si on lance deux dés l'un après l'autre, le résultat du premier ne me donne aucune indication sur le résultat du deuxième, les deux lancers sont indépendants.

Propriété :

Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants

Démonstration :

Soient A et B indépendants, montrons que $P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\times P(B)$

D'après la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)$$

Donc

$$
\begin{aligned}
P(\bar{A}\cap B) &= P(B)-P(A\cap B) \\
&= P(B)-P(B)\times P(A) \\
&= P(B)(1-P(A))=P(B)\times P(\bar{A})
\end{aligned}
$$

Fin

II) Suites en probabilités

Définition :

On peut considérer une succession d'événements indépendants et s'intéresser à la probabilité du n$^{\text{ième}}$.

Un jeu sur smartphone est paramétré ainsi :
- La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,25.
- Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :
  - s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,75 ;
  - s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,5.

On note G_n la probabilité qu'à le joueur de gagner la n$^{\text{ième}}$ partie.

1) Quelle est la probabilité que le joueur gagne la 2[ème] partie ?

2) Compléter l'arbre de probabilité

3) En déduire que $p_{n+1}=0,5-0,25\,p_n$

4) Quelle est la nature de la suite (p_n) ?

5) On considère la suite (w_n) définie pour tout entier n par $w_n=p_n-0,4$.
Montrer alors que $w_{n+1}=-0,25\,w_n$.

6) En déduire une formule explicite de w_n .

7) En déduire alors une expression de p_n en fonction de *n*.