Chapitre 5: Puissance

I) Règle de calcul

Définition : $7^5=7\times7\times7\times7\times7$ $\qquad -5^3=-5\times5\times5$

$$7^{-5}=\frac{1}{7^5}=\frac{1}{7\times7\times7\times7\times7}$$

Attention : $-5^3=-5\times5\times5$ *alors que* $(-5)^3=-5\times(-5)\times(-5)$

Formules:	Exemple:
$a^m\times a^n=a^{m+n}$	$8^{81}\times8^{-80\,143}=8^{81-80\,143}=8^{-80\,062}$
$a^m\div a^n=a^{m-n}$	$\frac{2^{1000}}{2^{-250}}=2^{1000-(-250)}=2^{1\,250}$
$(a^m)^n=a^{m\times n}$	$(2{,}5^5)^3=2{,}5^{5\times3}=2{,}5^{15}$
$a^m\times b^m=(a\times b)^m$	$3^3\times2{,}5^3=(3\times2{,}5)^3=7{,}5^3$

Règles des signes:

> Une puissance paire donnera toujours un résultat positif alors qu'un nombre négatif élevé à une puissance impaire aura un résultat négatif.

Exemple :

Quel est le signe de $(-2)^{-1721}\times(-5)^{15}$?

- - le résultat sera positif, on peut donc enlever les parenthèses.

$3^{-5}\times(-21)^{71}\times(-3)^{-2}$

+ - + le résultat sera négatif, on peut donc enlever les parenthèses en laissant un signe moins

Cas particuliers

$71^1=71$ $\qquad 71^0=1$ $\qquad a^{-n}\times a^n=a^{-n+n}=a^0=1$

Remarque :

Par définition, on peut, dans une fraction, faire passer un nombre du numérateur au dénominateur en changeant le signe de la puissance.

Exemple:

$$\frac{2^{51}\times10^3\times3^{-59}}{2^{-13}\times3^5\times10^{-2}}=\frac{2^{51}\times10^3\times2^{13}\times10^2}{3^5\times3^{59}}=\frac{2^{64}\times10^5}{3^{64}}=2^{64}\times10^5\times3^{-64}$$

II) Calcul scientifique

Définition :
Tout nombre peut s'écrire sous la forme $a\times10^n$ où n est un entier naturel et a est un nombre composé d'un seul chiffre non nul avant la virgule.

Exemple :

$-7\ 000\ 530=-7{,}00053\times10^6\approx-7\times10^6$

$0{,}000\ 000\ 65=6{,}5\times10^{-7}$

$2^{40}\approx1{,}099\times10^{12}$

$2^{40}+1\approx1{,}099\times10^{12}$ *Ces trois résultats sont différents mais très très proches.*

$2^{40}+100\approx1{,}099\times10^{12}$

Methode de calcul :
Face à un calcul avec des nombres en écriture scientifique, on procédera comme suit

1/ On regroupe les puissances de 10 à droite et le reste à gauche
2/ On calcule chaque groupe
3/ On met le premier nombre en écriture scientifique
4/ On rassemble les deux puissances de dix

$$A=\frac{7\times10^{159}\times5{,}8\times10^{-231}}{1{,}6\times10^{304}}$$

$$A=\frac{7\times5{,}8}{1{,}6}\times\frac{10^{159}\times10^{-231}}{10^{304}}$$

$$A=25{,}375\times10^{-376}$$

$$A\approx2{,}53\times10^{1}\times10^{-376}$$

$$\boxed{A\approx2{,}53\times10^{-375}}$$

III) Racine carrée

Définition : La racine carrée d'un nombre a est le nombre positif b qui élevé au carré donne a.
On a donc $b^2=a$
C'est la fonction réciproque de f(x)=x² pour les nombres positifs (c'est-à-dire que c'est le contraire) et on la note $f(x)=\sqrt{x}$

On ne peut donc pas calculer la racine carrée d'un nombre négatif.

Les racines des carrés parfaits sont à connaître par coeur :

$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{144}=12$
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{169}=13$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{196}=14$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{225}=15$

Remarque :

On a pour tout x positif $\sqrt{x^2}=x$ et $\sqrt{(-5)^2}=5$

$(\sqrt{x})^2=x$ $(\sqrt{-5})^2=impossible$

Produit de racines

Propriété : $\forall a,b\geqslant 0 ; \sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

Démonstration :

Lemme : $\forall p,q>0 ; p^2=q^2 \Leftrightarrow p=q$

Soient p,q > 0 ; $p^2=q^2 \Leftrightarrow p^2-q^2=0 \Leftrightarrow (p+q)(p-q)=0 \Leftrightarrow p+q=0 \, ou \, p-q=0$

$\Leftrightarrow p=-q \, ou \, p=q$

Or p+q= 0 n'est possible que pour p=q=0, donc on peut l'enlever

Finalement, $\boxed{\forall p,q>0 ; p^2=q^2 \Leftrightarrow p=q}$

Soient a , b > 0.

On remarque aisément que :
- $(\sqrt{a\times b})^2=a\times b$
- $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=a\times b$

Posons $p=\sqrt{a\times b}$ *et* $q=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ *qui sont donc strictement positifs.*

Nous avons donc $p^2=a\times b$ *et* $q^2=a\times b$ *, c'est-à-dire* $p^2=q^2$

En utilisant le lemme, $p=q$ *, c'est-à-dire* $\boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}}$

Ainsi, on peut rentrer ou sortir des nombres d'une racine carrée. En effet, prenons l'exemple de 588: On peut remarquer que $588=196\times 3=14^2\times 3$, du coup on a :

$$\sqrt{588}=\sqrt{14^2\times 3}=\sqrt{14^2}\times\sqrt{3}=14\sqrt{3}$$

Le $\times$ *devant la racine peut être effacé.*

Nous avons bien simplifié la racine, évidemment l'opération marche dans l'autre sens; on peut ainsi rentrer le 14 dans la racine, il se transforme alors en 14^2.

D'où l'importance de connaître la liste des carrés parfaits pour trouver rapidement les nombres que l'on peut sortir.

Pourquoi simplifier une racine alors que la calculatrice me donne la réponse?

Pour la même raison pour laquelle vous simplifiez les fractions au maximum (calcul de pgcd etc). En fait, la calculatrice vous donne une valeur approchée qui ne peut être utilisée QUE pour répondre à une question.

Exemple :

Je calcule la longueur d'un mur. Je trouve après mon calcul $\sqrt{5}$. Le mur mesure donc 2,2 m. Par contre, si je refais un calcul avec ce résultat, je ne peux pas prendre 2,2 mais je DOIS impérativement prendre $\sqrt{5}$; même si c'est plus compliqué. C'est ce qu'on appelle la valeur exacte.

IV) Somme de racines

Vous savez le faire avec des lettres:

$A=3x+5y-2x-4y-7x+12y$

$A=3x+5y-2x-4y-7x+12y$

$A=-6x+13y$ *On rassemble les termes de même nature (même lettre, même exposant)*

Il suffit de remplacer x et y par des racines carrées de deux nombres différents:

$$A=3\sqrt{2}+5\sqrt{5}-2\sqrt{2}-4\sqrt{5}-7\sqrt{2}+12\sqrt{5}$$

$$A=-6\sqrt{2}+13\sqrt{5}$$

On rassemble toutes les racines de 2 et les racines de 5.

Pour faire un calcul avec des racines, on suivra donc ces deux étapes:
1- On simplifie les racines au maximum
2- On rassemble les racines identiques

$$\begin{aligned}\sqrt{18}+\sqrt{75}-\sqrt{72}-\sqrt{48}&=\sqrt{2\times 9}+\sqrt{25\times 3}-\sqrt{2\times 36}-\sqrt{16\times 3}\\&=3\sqrt{2}+5\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4\sqrt{3}\\&\boxed{=-3\sqrt{2}+\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Voici une erreur trop fréquente qui copie la formule du produit : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

En effet, soit a,b deux réels strictements positifs

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}>a+b \qquad \textit{car} \quad \sqrt{ab}>0$$

On a a donc $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>a+b>0$ *or on sait que* $\forall\, 0<x<y, \sqrt{x}<\sqrt{y}$

Ainsi $\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}>\sqrt{a+b}\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ *et en conclusion*

$$\boxed{\forall a,b>0, \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}}$$

V) Quotient de racines

Formule: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

On peut faire passer une racine carrée du dénominateur au numérateur.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

A chaque fois que vous aurez une racine au dénominateur, vous vous arrangerez pour la faire passer au numérateur. On ne laissera jamais de racine au dénominateur (pour donner une expression plus compréhensible du résultat)

Définition

Soient deux réels a,b et un réel positif c. Le **conjugué** de $a+b\sqrt{c}$ est $a-b\sqrt{c}$

Propriété :

Si le dénominateur d'une fraction est de la forme $a+b\sqrt{c}$, multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué $a-b\sqrt{c}$ fera disparaître la racine du dénominateur.

Exemple :

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}}=\frac{(3+2\sqrt{2})\times(1+3\sqrt{2})}{(1-3\sqrt{2})\times(1+3\sqrt{2})}=\frac{3+9\sqrt{2}+2\sqrt{2}+6\times(\sqrt{2})^2}{1-9\times(\sqrt{2})^2}=\frac{15+11\sqrt{2}}{-17}$$