Les suites II *Variations*

Compétence 1 : Variations

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2n^2 - n$.

1) Calculer les trois premiers termes.
2) Conjecturer les variations de (u_n).
3) Etudier les variations de (u_n).

Exercice 2

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n^2 - 18n + 80$

Etudier les variations de (v_n).

Exercice 3

On considère la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{2n+1}{n+3}$

Etudier les variations de (w_n).

Exercice 4

Déterminer les variations de ces suites :

1. a(n) une suite arithmétique de terme initial -5 et de raison 3.
2. b(n) une suite arithmétique de terme initial 150 et de raison -13.
3. c(n) une suite géométrique de terme initial -5 et de raison 3.
4. d(n) une suite géométrique de terme initial 2 et de raison 0,2.
5. e(n) une suite géométrique de terme initial 1 et de raison $\frac{25}{21}$.
6. f(n) une suite géométrique de terme initial -0,4 et de raison -2.

Exercice 5

Déterminer les variations de ces suites :

1. a(n) une suite arithmétique de terme initial -5 et de raison 0,08.
2. b(n) une suite géométrique de terme initial 150 et de raison 1,03.
3. c(n) une suite géométrique de terme initial -7 et de raison $\frac{1}{3}$.
4. d(n) une suite géométrique de terme initial 42 et de raison 1.

Compétence 3 : Problèmes (avec algorithme)

Exercice 6

Le carbone 14 est un isotope radioactif utilisé en archéologie pour dater des échantillons carbonés. En effet, celui-ci est présent dans toute matière organique vivante en proportion constante. A la mort de l'organisme, en l'absence d'échanges avec l'environnement, le nombre d'atomes de carbone 14 diminue selon une loi mathématique connue.

1. On appelle demi-vie le temps nécessaire pour que le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon diminue de moitié. On modélise par une suite u(n), le nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon au bout de n demi-vies ($n \geq 0$). On notera n_0 le nombre initial de noyaux radioactifs.

   Définir par récurrence la suite u(n).

2. Quel est le type de la suite u(n)? En déduire une formule explicite.

3. On considère un échantillon qui ne contient plus que 12,5% de ses atomes radioactifs. Estimer l'âge de cet échantillon sachant que la demi-vie du carbone 14 vaut 5730 ans.

4. On considère que lorsque l'échantillon contient moins de 0,4% de son nombre initial d'atomes radioactifs, il n'est plus possible de procéder à une datation.

   Déterminer approximativement, à l'aide de la calculatrice, la date après laquelle toute datation est impossible.

Exercice 7

Tout élément radioactif est instable : ses atomes se désintègrent au cours du temps. On appelle période radioactive (ou demi-vie) le temps T au bout duquel la moitié des atomes, initialement présents dans un échantillon, se sont désintégrés.
Une centrale nucléaire produit différents déchets lors de son fonctionnement. Ces déchets, pour la plupart radioactifs, ne peuvent pas être traités de manière conventionnelle (recyclage, destruction, ..). La seule solution actuelle pour gérer ces déchets et de les stocker puis d'attendre que les atomes se désagrégent (entraînant une baisse de la radioactivité).

On considère l'isotope Krypton 85 (^{85}Kr) qui a une période radioactive d'environ 11 ans.
On a stocké un baril de 240 kg de Krypton 85 et on s'interroge sur la durée de conservation de ce baril.

1) Quelle est la masse de Krypton 85 contenu dans ce baril au bout de 11 ans ? 22 ans ?
Dans ce qui suit on note u(n) la masse de Krypton 85 après 11 x n années.

2) **a** - Précisez u(0), u(1) et u(2)

b - Expliquez pourquoi $u(n+1)=0{,}5\times u(n)$ pour tout entier naturel *n*.

c - Déduisez-en la nature de la suite $u(n)$ puis, pour tout entier *n*, une expression de $u(n)$ en fonction de *n*.

3) Quel est la masse de Krypton 85 contenu dans le baril au bout de 121 ans ?

4) On considère que le baril peut être ouvert et la masse de déchet traité lorsque la masse de Krypton 85 descend en dessous de 20 g.

Combien d'années doit être stocké ce baril ?

Exercice 8

Nourrir des poules avec les restes alimentaires permet de réduire la quantité de déchets à incinérer. Afin de réduire le volume des ordures ménagères, une mairie offre en 2017 des poules à 50 foyers et décide, chaque année, d'augmenter le nombre de nouveaux foyers à qui l'on offre des poules de 18% par an.

On modélise le nombre de foyers ayant reçu des poules au cours de l'année (2017+n) par une suite u(n).

1. Vérifier que u(1)=59.
2. Quelle relation de récurrence permet de calculer u(n).
3. Etudier les variations de la suite u(n).
4. Déterminer, par la méthode de votre choix, l'année à partir de laquelle la mairie offrira des poules à plus de 1000 foyers.

Exercice 9

Le cabillaud est victime de la surexploitation des océans et de la pêche intensive. En mer du Nord, on remarque que sa population diminue de 8% environ par an. Elle était de 5 millions d'individus en 2019.
On note $c(n)$ la population de cabillaud en 2019+n.

1) Quelle est la population de cabillaud en 2020.
2) Quelle relation de récurrence permet de calculer $c(n)$.
3) Déterminer les variations de la suite $c(n)$.
4) Déterminer, par la méthode de votre choix, l'année à partir de laquelle la population de cabillaud descendra en dessous de 2 millions.

Exercice 10

Un influenceur lance sa chaîne en 2024.
La première année, il gagne 1 200 abonnés.

Chaque année, grâce à sa visibilité croissante, le nombre de nouveaux abonnés gagnés par an augmente de 22 %.

On note $u(n)$ le nombre de nouveaux abonnés obtenus au cours de l'année 2024+n.

1. Calculer $u(1)$.
2. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $u(n)$ et préciser sa nature.
3. Étudier les variations de la suite $u(n)$.
4. À partir de quelle année l'influenceur gagnera-t-il plus de 10 000 nouveaux abonnés par an ?

Exercice 11 *Politique de recrutement et fidélisation en entreprise (RH)*

Une entreprise de conseil met en place en 2023 une politique de recrutement et de fidélisation.

En 2023, elle recrute 80 nouveaux salariés.
Le nombre de nouveaux recrutements annuels augmente de 12 % par an.
Chaque année, 6 % des salariés quittent l'entreprise.

On note $r(n)$ le nombre de recrutements durant l'année 2023+n, et $E(n)$ l'effectif total de l'entreprise à la fin de l'année 2023+n.

On suppose que l'effectif initial au 1er janvier 2023 est de 500 salariés.

1. Exprimer $r(n)$ en fonction de n et montrer que $r(n)$ est une suite géométrique.
2. Calculer le nombre de recrutements prévus en 2026.
3. Justifier que l'effectif $E(n)$ vérifie la relation de récurrence :

$$E(n+1) = 0{,}94\,E(n) + r(n+1)$$

4. Calculer $E(1)$ et $E(2)$.
5. L'entreprise souhaite atteindre 800 salariés. À l'aide d'un tableur ou d'un raisonnement approché, déterminer à partir de quelle année cet objectif sera atteint.
6. Expliquer qualitativement l'impact du turnover sur la croissance de l'effectif, même en présence d'une politique de recrutement dynamique.