

Cours: Bernoulli, Binomiale

I) Bernoulli

Définition: Une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues (succès ou échec pour simplifier).
On appelle paramètre la probabilité p d'obtenir un succès.
La probabilité d'un échec est alors $1-p$.

Exemple:

On lance un dé à 6 faces équilibré. Je gagne si le 2 ou le 3 sortent, je perds sinon.
Il s'agit d'une expérience de Bernoulli (je perds ou je gagne) de paramètre $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
J'ai en effet deux chances sur 6 de gagner.

Rappel: Une variable aléatoire est une fonction qui associe à chaque issue un nombre.

Dans une expérience de Bernoulli de paramètre p , on définit une variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si on a un succès et la valeur 0 si on a un échec.

$$\text{On a alors } P(X=1)=p$$

$$P(X=0)=1-p$$

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim B(p)$

Propriété:

L'espérance de $X \sim B(p)$ est p .
Sa variance est $p(1-p)$

Démonstration:

X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , elle ne prend donc que deux valeurs (0 ou 1).

$$E(X) = 1 \times P(X=1) + 0 \times P(X=0)$$

$$V(X) = p \times (1 - E(X))^2 + (1-p) \times (0 - E(X))^2$$

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p)$$

$$V(X) = p \times (1-p)^2 + (1-p) \times p^2$$

$$E(X) = p$$

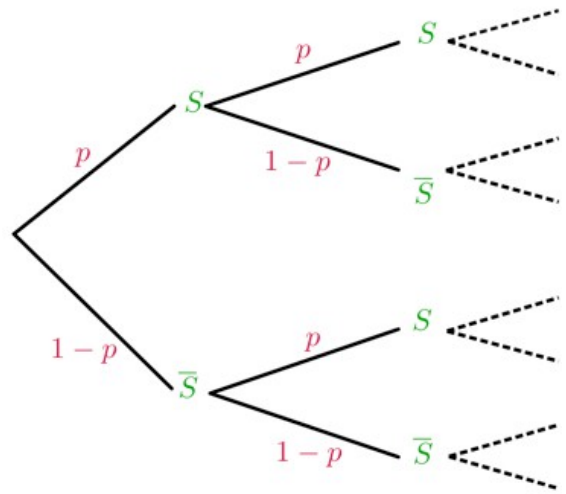
$$V(X) = p \times (1-p)$$

II) Schéma de Bernoulli

Définition:

On appelle schéma de Bernoulli de paramètre n et p , une expérience aléatoire qui consiste à répéter, de façon **indépendante**, n fois une expérience de Bernoulli de paramètre p .

On la représente graphiquement par un arbre pondéré.



Exemple:

Considérons une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est 0,7. Si je lance une fois la pièce, c'est une expérience de Bernoulli.

Si je lance 5 fois la pièce, c'est un schéma de Bernoulli de paramètres (5 ; 0.7).

III) Loi binomiale

Définition:

On considère une expérience de Bernoulli de paramètre p que l'on répète de manière indépendante n fois.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de succès de l'expérience.

$$\text{Donc } X \in \{0; 1; \dots; n\}$$

Définition:

On note $\binom{n}{k}$, et on lit "k parmi n", le nombre de chemins réalisant k succès parmi les n répétitions. Ces nombres s'appellent coefficients binomiaux.

Propriété:

$$\text{Pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n, \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration:

Un chemin qui contient k succès de probabilité p , contient $n-k$ échecs de probabilité $1-p$. Donc la probabilité d'un tel chemin est $p^k (1-p)^{n-k}$ (car la répétition est indépendante, on peut multiplier directement)

Il y a $\binom{n}{k}$ chemins qui contiennent k succès. Finalement, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p ; on note $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Propriété :

L'espérance de $X \sim \text{Bin}(n, p)$ est np .
Sa variance est $np(1-p)$ et son écart-type $\sqrt{np(1-p)}$

Démonstration : Admise

Interprétation :

L'espérance, notée μ , correspond à la valeur moyenne obtenue.

Graphiquement, si l'on représente la loi binomiale par un diagramme en barre, elle correspond à l'abscisse du maximum.

L'écart-type, noté σ , correspond à l'écart moyen des valeurs par rapport à la moyenne.

Propriété : Intervalle de fluctuation

Si $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ alors

- $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ contient au moins 68% des valeurs
- $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ contient au moins 95% des valeurs
- $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ contient au moins 99,7% des valeurs

Démonstration : Admise

On peut trouver ces intervalles à la calculatrice, sans faire de calcul, en cherchant les valeurs dans un tableau.

IV) Exemples

Exemple 1

En tant que professeur, je considère qu'il y a une proportion de 70 élèves sérieux pour 100 élèves.

1) En supposant le choix des élèves indépendants, quelle est la probabilité que sur une classe de 24 élèves je n'ai que des élèves sérieux ?

Le choix pour chaque élève (sérieux ou pas sérieux) est une expérience de Bernoulli de paramètre 0,7. La répétition de manière indépendante de cette expérience 24 fois (car il y a 24 élèves) est un schéma de Bernoulli.

Soit X la variable aléatoire comptabilisant le nombre d'élèves sérieux.

X suit une loi binomiale de paramètre 24 et 0,7 : $X \sim \text{Bin}(24; 0.7)$

Donc on calcule $P(x=24) \approx 0,0002$, j'ai donc 0,02% de chance de n'avoir que des élèves sérieux.

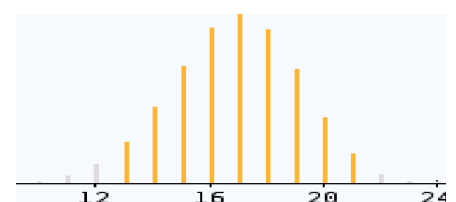
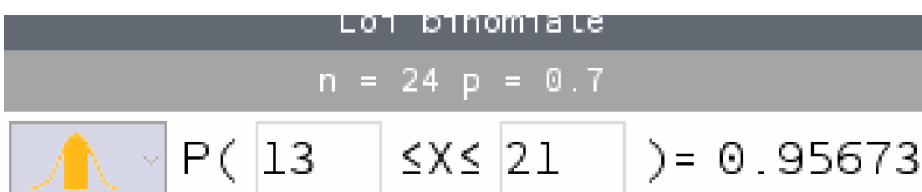
2) En supposant le choix des élèves indépendants, quelle est la probabilité que sur une classe de 24 élèves j'ai au moins 12 élèves sérieux ?

$$P(X \geq 12) = 0,988$$

J'ai donc 98,8% de chance d'avoir au moins 12 élèves sérieux.

3) En supposant le choix des élèves indépendants, quel dans quel intervalle serai-je certain, au seuil de 95%, que le nombre d'élèves sérieux se trouve ?

A la calculatrice, en centrant l'intervalle autour de 17



V) Coefficients binomiaux

Cas triviaux

$$\forall n \geq 1, \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Il n'y a qu'un seul chemin constitué uniquement de succès. (De même pour aucun succès)

Propriété :

Il y a une symétrie dans les schémas de Bernoulli i.e. il y a autant de chemins avec k succès que de chemins avec k échecs.

Avec $n \geq 1, k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Propriété :

Avec $n \geq 1, k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration :

Dans une répétition de $n+1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le nombre de chemins réalisant $k+1$ succès est $\binom{n+1}{k+1}$, hors on peut considérer ces chemins de deux façons :

- Ceux commençant par un succès, il reste alors à choisir k succès parmi les n répétitions restantes, il y a donc $\binom{n}{k}$ tels chemins.

- Ceux commençant par un échec, il reste alors à choisir $k+1$ succès parmi les n répétitions restantes, il y a donc $\binom{n}{k+1}$ tels chemins.

Conséquence : Triangle pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	9	10	5	1

Les lignes correspondent aux valeurs de n et les colonnes aux valeurs de k .

VI) Indépendance

Rappel : Deux évènements A et B sont indépendants si P(B) ne varie pas en fonction du résultat de A et réciproquement.

Exemple :

1 - Lancer deux pièces crée deux évènements indépendants (le résultat de la première pièce ne donne aucune indication sur le résultat de la seconde)

2 - Tirons deux boules sans remise dans une urne contenant une boule rouge et une jaune.

Notons l'évènement B : "j'obtiens jaune en deuxième"

Cet évènement n'est pas indépendant du tirage de la première boule, suivant le résultat de la première P(B) varie (0 si jaune est déjà sorti, 1 sinon)



Les tirages sans remise ne constituent pas des évènements indépendants. Cependant si le nombre de boules total est assez grand par rapport au nombre de tirage, on constate que l'écart entre les deux calculs (avec et sans remise) est très faible.

Par exemple, dans le cas d'une urne contenant 100 billes dont n vertes, on tire 3 billes. On considère l'évènement "obtenir 3 vertes" faisons les calculs en faisant varier la valeur de n.

n	avec remise	sans remise
	$\frac{n}{100} \times \frac{n}{100} \times \frac{n}{100}$	$\frac{n}{100} \times \frac{n-1}{99} \times \frac{n-2}{98}$
3	0,0000270	0,0000062
4	0,0000640	0,0000247
5	0,0001250	0,0000618
...
12	0,0017280	0,0013605
20	0,0080000	0,0070501
50	0,1250000	0,1212121
64	0,2621440	0,2576623
98	0,9411920	0,9406061
100	1	1

écart
0,0000208
0,0000393
0,0000632
...
0,0003675
0,0009499
0,0037879
0,0044817
0,0005859
0

En pratique si n est grand par rapport à k, les tirages sans remises sont considérés comme étant des tirages avec remises (et sont donc indépendants).

Ceci étant une approximation, il faut l'indiquer.

VII) Calculatrice

Pour calculer $P(X=k)$ si $X \sim \text{Bin}(n, p)$:

Prenons par exemple $n=100$, $p=0,5$ et $k=46$

Sur TI :

Dans le menu distrib (2nd var), binomFdp (binomPdf en anglais) puis compléter avec les paramètres :

binomFdp(100, 0.5,46)

Sur Casio :

Dans OPTN puis STAT puis DIST puis BINM puis BPD, entrer les paramètres :

x=46	c'est le nombre de succès
numtrial=100	c'est la valeur de n
p=0,5	c'est la valeur de p

Pour calculer $P(X \leq k)$ si $X \sim \text{Bin}(n, p)$:

Prenons par exemple $n=100$, $p=0,5$ et $k=46$

Sur TI :

Dans le menu distrib (2nd var), binomFRép (binomcdf en anglais) puis compléter avec les paramètres:

binomFRép(100, 0.5,46)

Sur Casio :

Dans OPTN puis STAT puis DIST puis BINM puis BCD, entrer les paramètres :

x=46	c'est le nombre de succès
numtrial=100	c'est la valeur de n
p=0,5	c'est la valeur de p