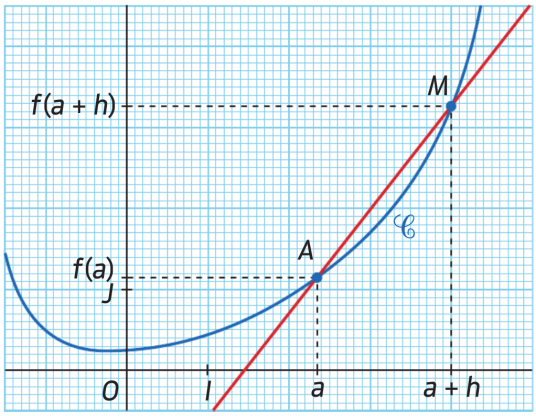
Cours : Nombre dérivé

I) Taux d'accroissement



Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I, *a* un réel de I et *h* un réel non nul tel que *a+h* soit dans I.

On appelle taux d'accroissement de *f* entre *a* et *a+h* le coefficient directeur de la droite passant par les points de *f* ayant pour abscisses *a* et *a+h* i.e. le réel :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarquez qu'ici on ne peut pas remplacer h par zéro.

Définition : On dit que ***f* est dérivable** en *a* si le taux d'accroissement tend vers un réel lorsque *h* tend vers 0 (si en simplifiant, on peut remplacer *h* par 0).

Cette valeur "limite" est appelée **nombre dérivé** de *f* en *a* et est noté $f'(a)$.

Exemple :

$f(x)=2x^2+5$, calculons $f'(3)$

On veut simplifier $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$; on sait que $f(3)=2\times3^2+5=23$

et $f(3+h)=2(3+h)^2+5=18+12h+2h^2+5=23+12h+2h^2$

On en déduit $f(3+h)-f(3)=12h+2h^2$

Et donc $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=12+2h$

En remplaçant *h* par 0, on trouve $f'(3)$

$$f'(3)=12+2\times0=12$$

II) Tangente

Définition : Soit un réel *a* et une fonction *f dérivable en* a.

On appelle tangente à la courbe représentative de *f* la droite passant par le point $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété :

L'équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Démonstration :

Par définition, $f'(a)$ est le coefficient directeur donc l'équation de la tangente, qui est une fonction affine, s'écrit : $y = f'(a)x + p$

Cette droite passe par le point $(a, f(a))$ donc $f(a) = f'(a) \times a + p$

On en déduit $p = f(a) - a f'(a)$

Finalement, l'équation de la tangente est :

$$y = f'(a)x + f(a) - a f'(a) = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Histoire : La notion de nombre dérivé a vu le jour au XVII^{e} siècle dans les écrits de Leibniz et de Newton qui le nomme fluxion et qui le définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».

Introduit pour résoudre des problèmes de géométrie (recherche de tangente) et d'analyse (recherche d'extremums), les applications de ce que l'on appelera le calcul différentiel sont immenses.

La dérivée c'est la mesure de l'instantanée, elle permet de:

- trouver la tangente
- relier position, vitesse et accélération
- déterminer des approximations de fonctions compliquées par des polynômes
- calculer un coût marginal (en économie)
- la plupart des équations de physique sont exprimées à l'aide de dérivée (ce sont alors des équations différentielles)
- étudier les variations d'une fonction et de trouver ses extremums