Chapitre 6 : Les vecteurs

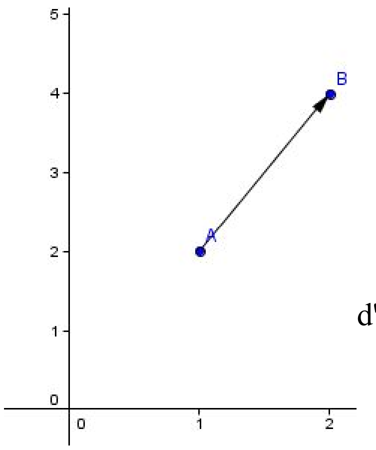
Isaac Newton (1643-1727) développera la notion de force à l'aide de flêches et, dans le même temps, Leibniz s'intéressera à cette notion de vecteurs et à la géométrie vectorielle.

I) Notions de base

Définition : Un vecteur est une flêche.
Un vecteur est caractérisé par trois critères :

- il a un sens
- il a une norme *(sa longueur)*
- il a une direction *à ne pas confondre avec le sens, il s'agit de l'inclinaison, pensez au coefficient DIRECTEUR.*

Exemple :

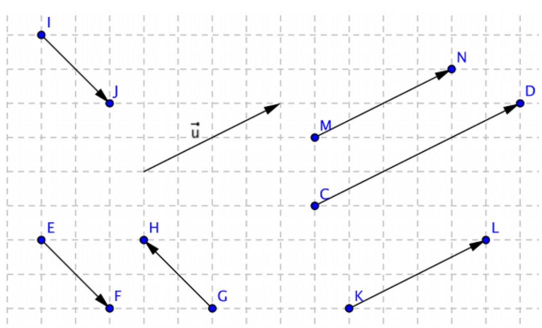


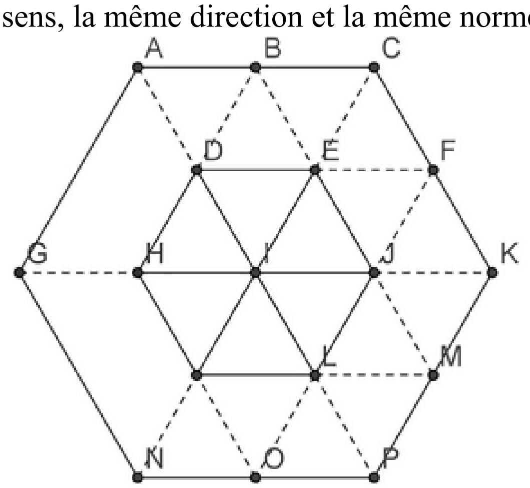
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la flêche partant du point A et arrivant sur le point B.

Remarquez la notation, l'origine en premier (A) puis le point d'arrivée (B) et une flêche au-dessus (toujours orientée vers la droite)

Les vecteurs ne sont pas positionnés dans le repère, autrement dit deux flêches ayant le même sens, la même direction et la même longueur représentent le même vecteur. On peut donc nommer un vecteur avec une seule lettre (en minuscule, c'est la tradition en math) puisque le point d'origine ne définit pas le vecteur.

Définition : Deux vecteurs sont égaux s'ils ont le même sens, la même direction et la même norme.





Le vecteur $\vec{u}$ est égal au vecteur .....

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est égal au vecteur .....

Complétez :

$\overrightarrow{HJ} = ... = ...$

$\overrightarrow{EN} = ... = ...$

Définition : Les vecteurs définissent une transformation nommée <u>translation</u>.
La figure image est obtenue en faisant glisser la figure initiale le long du vecteur.

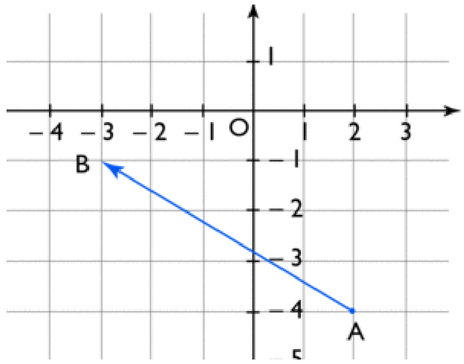
Dans l'hexagone précédent, l'image du triangle DHI par la translation de vecteur $\overrightarrow{HJ}$ est le triangle JFK.

Propriété :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

Démonstration : en exercice

II) Coordonnées



Définition : On définit les coordonnées d'un vecteur par :

$$\vec{u}\,(\textit{déplacement horizontal ; déplacement vertical})$$

Ici nous reculons de 5 carreaux et montons de 3 carreaux.

Les coordonnées sont donc $\overrightarrow{AB}(-5\,;3)$, aussi notées verticalement $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$

On peut remarquer que les coordonnées du vecteur se déduisent des coordonnées du point d'origine et du point d'arrivée.

$$x_{\overrightarrow{AB}}=x_B-x_A \quad \text{et} \quad y_{\overrightarrow{AB}}=y_B-y_A$$

Remarque : Les calculs se font dans l'ordre inverse des lettres i.e. point d'arrivée moins le point de départ.

Définition : On note $\vec{i}$ le vecteur de coordonnée $(1\,;0)$ et $\vec{j}\,(0\,;1)$

Propriété :

$$\forall \vec{u}\,(a\,;b)\,;\vec{u}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$$

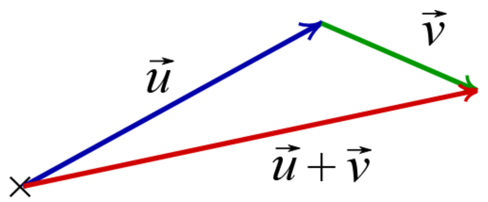
Définition : On appelle norme d'un vecteur sa longueur. On note : $\|\vec{u}\|$

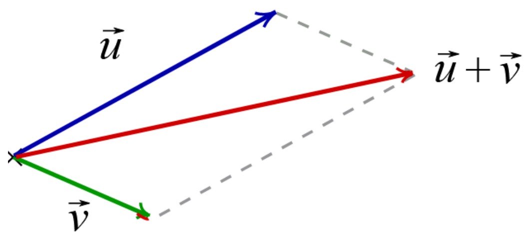
Propriété :

$$\forall \vec{u}\,(a\,;b)\,;\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

III) Somme de vecteurs

Définition : La somme de deux vecteurs s'obtient en placant les vecteurs bout à bout et en reliant l'origine du premier vecteur et l'arrivée du second.

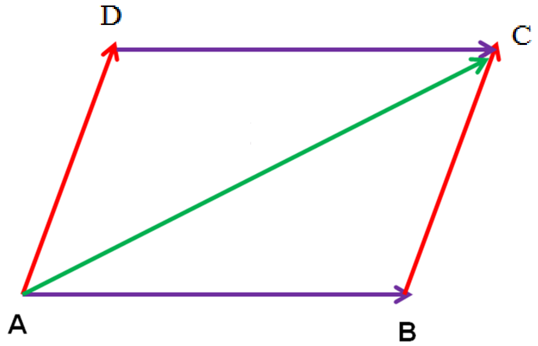




On reconnaît un parallélogramme dans la deuxième figure. En reproduisant le vecteur $\vec{v}$, nous avons deux segments de même longueur et parallèle et par conséquent un parallélogramme.

Règle du parallélogramme :

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



Pour constuire le vecteur somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, on place le point D de sorte que ABCD soit un parallélogramme et le vecteur somme est $\overrightarrow{AD}$.

Relation de Chasles :

Les points A et B étant donné, pour tout point M du plan, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}}$$

Application :

Simplifier $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{A\cancel{B}}+\overrightarrow{\cancel{B}M}+\overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{A\cancel{M}}+\overrightarrow{\cancel{M}C}\\ &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

L'ordre n'est pas important dans une addition.

Il suffit d'additionner les coordonnées des deux vecteurs pour trouver les coordonnées du vecteur somme :

Si $\overrightarrow{AB}(-5;3)$ et $\overrightarrow{CD}(10;0)$ alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(5;3)$

IV) Différence de vecteurs

Définition :

L'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $-\overrightarrow{AB}$, est le même vecteur en sens inverse : $\overrightarrow{BA}$

Si $\overrightarrow{AB}(-5;3)$ alors $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}=(5;-3)$

Il suffit de soustraire les coordonnées des deux vecteurs pour trouver les coordonnées du vecteur différence :

Si $\overrightarrow{AB}(-5;3)$ et $\overrightarrow{CD}(10;0)$ alors $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=(5;3)$

V) Produit par un réel

Définition : Soit un nombre $k \in \mathbb{R}$, et un vecteur $\vec{u}(x, y)$.
Le produit $k \times \vec{u}$ est le vecteur $\vec{v}(kx, ky)$

Propriété :

Multiplier un vecteur par un réel postif ne change pas sa direction ni son sens. Cela ne change que sa norme.
Multiplier par un réel négatif ne change pas la direction. Cela change sa norme et son sens.

VI) Colinéarité

Définition : Deux vecteurs sont dits colinéaires s'ils ont la même direction.

Comme multiplier un vecteur par un nombre ne change pas la direction,
Propriété :

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Remarque : Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors $\frac{1}{k}\vec{u} = \vec{v}$. Les nombres k et $\frac{1}{k}$ sont apellés coefficients de colinéarité.

La colinéarité est un outil très puissant pour démontrer le parallèlisme.

Définition : Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a', b')$ est le calcul:

$$\boxed{det(\vec{u}, \vec{v}) = a \times b' - a' \times b}$$

Propriété : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Démonstration :

Soient deux vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a', b')$ *où a et a' sont non nuls.*

$$\begin{aligned}
\vec{u} \textit{ et } \vec{v} \textit{ sont colinéaires} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \vec{u} = k \times \vec{v} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, a = k \times a' \text{ et } b = k \times b' \\
&\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \\
&\Leftrightarrow a \times b' = a' \times b \\
&\Leftrightarrow a \times b' - a' \times b = 0 \\
&\Leftrightarrow det(\vec{u}, \vec{v}) = 0
\end{aligned}$$

Si a est nul, alors a' est nul aussi (car $a = k \times a'$ *) et dans ce cas* $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Théorème 1 :

Soient 3 points A,B,C deux à deux distincts.
A,B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration :

On se place dans un repère $R(A, \vec{i}, \vec{j})$ *choisi de telle sorte que les coordonnées de B soient non nulles.*

L'équation de la droite (AB) dans ce repère est $y=\frac{y_B}{x_B}x$ *(c'est une droite passant par l'origine A (0; 0))*

Dans ce repère, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$

$$C \in (AB) \Leftrightarrow y_C=\frac{y_B}{x_B}x_C \Leftrightarrow y_C \times x_B = y_B \times x_C \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}$$

Théorème 2 :

Soient 4 points A,B,C,D deux à deux distincts.
(AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

A quoi cela sert-il ?

En mathématiques :

Les vecteurs définissent une nouvelle transformation, vous aviez les symétries centrales et axiales, il y a maintenant les translations.

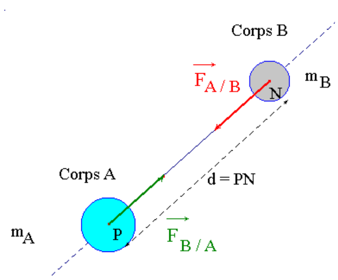
Ils définissent les repères du plan. Un repère est définit par une origine, notée O, un vecteur définissant l'axe des abscisses, noté $\vec{i}$, et un vecteur définissant l'axe des ordonnées, noté $\vec{j}$.
On note $R(O, \vec{i}, \vec{j})$

Ils permettent de résoudre les problèmes géométriques de façon analytique (par le calcul).

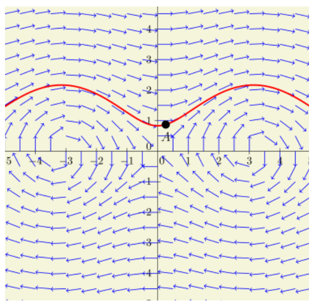
En physique :

Les vecteurs sont très utilisés, ils modélisent les forces. Par exemple :

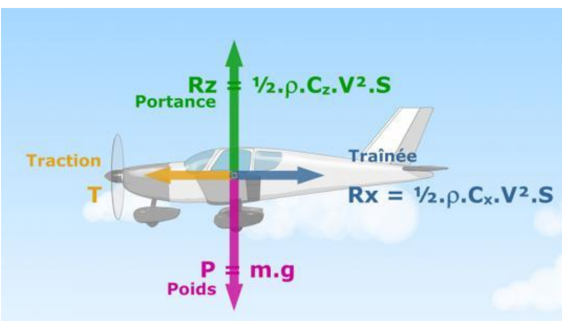
La force gravitationnelle exercée entre deux objets :



Les champs électro-magnétiques :



Les forces que subit un avion :



La poussée d'Archimède :