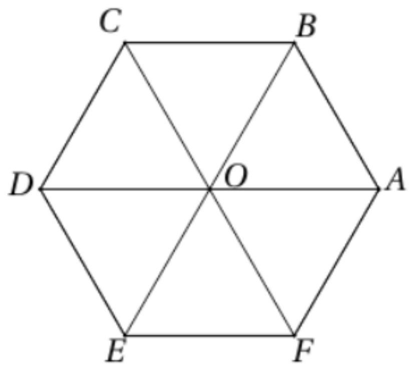
Vecteurs

Compétence 1 : Lecture de vecteurs

Exercice 1

Recopier et compléter les égalités suivantes en n'utilisant que des noms de points présents sur la figure :



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\dots$

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\dots$

$\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{DO}=\dots$

$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}=\dots$

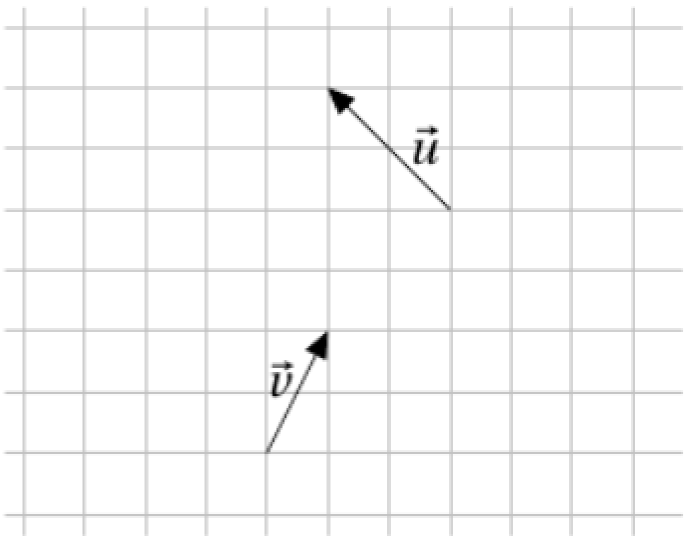
$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}=\dots$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AF}=\dots$

Exercice 2

Dessiner un représentant de :

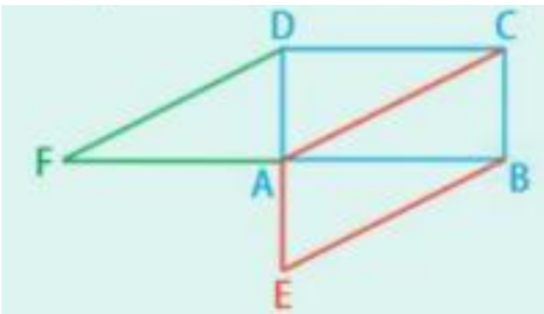
1. $2\vec{u}+\vec{v}$
2. $\vec{u}-3\vec{v}$
3. $-\vec{u}-\vec{v}$



Exercice 3

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle.
AFDC et ACBE sont des parallélogrammes.

Montrer que DBEF est un parallélogramme de centre A.



Compétence 2 : Coordonnées d'un vecteur

On se place dans un repère orthonormé.

Exercice 4

On considère les points $A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-10\\-7\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}$.

Exercice 5

On considère les points $A\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}9\\-5\end{pmatrix}$.

Déterminer la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}$.

Exercice 6

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}90\\-30\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}88\\-32\end{pmatrix}$.

Est-ce que ABCD est un parallélogramme ?

Exercice 7

On considère les points $A\begin{pmatrix}2{,}3\\-5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}13{,}1\\-14{,}5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0{,}8\\2{,}5\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}11{,}6\\-7\end{pmatrix}$.

Est-ce que ABCD est un parallélogramme ?

Compétence 3 : Relation de Chasles

Exercice 8

Construire un triangle ABC puis les points D, E et F tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$$

Exercice 9

Simplifier au maximum l'écriture du vecteur :

$$\vec{v} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{SI} - \overrightarrow{RB}$$

Exercice 10

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs :

$$\vec{u}=\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{SU}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{UH}$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}$$

Exercice 11

On donne un parallélogramme $RSTV$ de centre I.

1. Placer le point M tel que $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{RV}+\overrightarrow{IR}$.
2. Placer le point N tel que $SITN$ soit un parallélogramme.
3. Montrer que $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{IV}$ et que $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{NT}$.
4. En déduire que $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{NT}$ puis la nature du quadrilatère $RMTN$.

Compétence 4 : Colinéarité

Exercice 12

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-18\\-9\end{pmatrix}$.

Montrer qu'ils sont colinéaires et déterminer k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ et k' tel que $\vec{v}=k'\vec{u}$

Exercice 13

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}31\\9{,}2\end{pmatrix}$.

Montrer qu'ils sont colinéaires et déterminer k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ et k' tel que $\vec{v}=k'\vec{u}$

Exercice 14

On considère les points $A\begin{pmatrix}19\\-20\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}39\\-10\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-5\\50\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\53\end{pmatrix}$.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 15

On considère les points $A\begin{pmatrix}2{,}5\\-1{,}8\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1{,}5\\4{,}2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-0{,}8\\-9\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-10{,}8\\6\end{pmatrix}$.

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 16

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}512\\-102\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\x\end{pmatrix}$ où x est un réel.

Les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 17

On considère les points $A\begin{pmatrix}100\\22\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1871\\528\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-96\\-34\end{pmatrix}$.

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 18

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$.

Le but est de trouver l'équation de la droite *(d)* parallèle à (AB) passant par C.

1) Soit un point M appartenant à *(d)*. Que vaut $det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB})$?

2) En notant $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM}$.

3) Calculez le déterminant des deux vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

4) En déduire l'équation de la droite *(d)* .

Correction

Exercice 3

Pour montrer que c'est un parallélogramme, il suffit de montrer que nous avons deux vecteurs égaux : par exemple $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$

Puisque AFDC est un parallélogramme, nous avons $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CA}$.
Puisque ACBE est un parallélogramme, nous avons $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CA}$.
Par conséquent, $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BE}$ et donc $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$, ainsi DBEF est un **parallélogramme**.

Puisque AFDC est un parallélogramme, nous avons $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}$.
Puisque ABCD est un rectangle, nous avons $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.
Par conséquent, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ et donc $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}$ ce qui signifie que A est le milieu du segment [BF], c'est donc le milieu de la diagonale [BF] du parallélogramme DBEF.
A est donc le **centre** de DBEF.

Exercice 7

Pour que ABCD soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

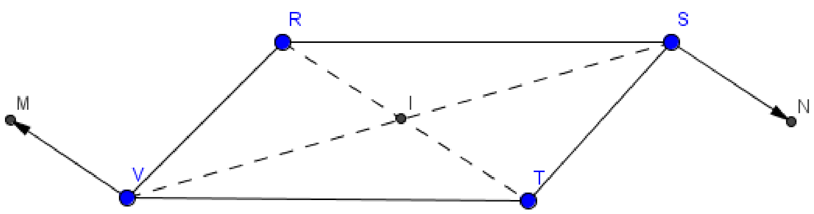
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13{,}1-2{,}3\\-14{,}5-(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10{,}8\\-9{,}5\end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8-11{,}6\\2{,}5-(-7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10{,}8\\-9{,}5\end{pmatrix}$$

ABCD n'est pas un parallélogramme.

Exercice 11



3. $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{RV}+\overrightarrow{IR}=\overrightarrow{IR}+\overrightarrow{RV}=\overrightarrow{IV}$ d'aprés la propriété de Chasles.

Comme SITN est un parallélogramme, $\boxed{\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{NT}}$

4. I est le centre du parallélogramme, I est donc le milieu de la diagonale [SV]. Nous avons donc $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{IV}$.

Comme $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{NT}$ et , $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{IV}=\overrightarrow{SI}$ nous avons $\boxed{\overrightarrow{NT}=\overrightarrow{RM}}$.

Ainsi, NTMR est un **parallélogramme**.

Exercice 16

Calculons le déterminant : $det(\vec{u},\vec{v})=512x-(-102)\times 10=512x+1020$

On sait que si le déterminant vaut zéro alors les vecteurs sont colinéaires, cela dépend donc de la valeur de *x*.

$$det(\vec{u},\vec{v})=0$$
$$512x+1020=0$$
$$512x=-1020$$
$$x=-\frac{1020}{512}=-\frac{255}{128}$$

Si $x=-\frac{255}{128}$ les vecteurs sont colinéaires.

Ils ne sont pas colinéaires si $x\neq-\frac{255}{128}$.

Exercice 18

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$.

1) Puisque C et M appartiennent à la droite *(d)* parallèle à (AB), les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, leur déterminant sera donc nul : $\boxed{det(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB})=0}$

2) $\overrightarrow{CM}=\begin{pmatrix}x_M-x_C\\y_M-y_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-(-6)\\y-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+6\\y+2\end{pmatrix}$

3) Nous avons $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2\\-1-(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$,

donc $det(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB})=4(x+6)-(-3)\times(y+2)=4x+3y+30$

Or on sait (question 1.) que ce déterminant vaut 0, donc $4x+3y+30=0$

On isole le *y* : $\boxed{(d): y=-\frac{4}{3}x-10}$

Sources

Exercice 1-2-8-10-11 : https://www.annales2maths.com/2nd-exercice-somme-vecteurs/