

# Chapitre : Continuité

## I) Fonction continue en un point

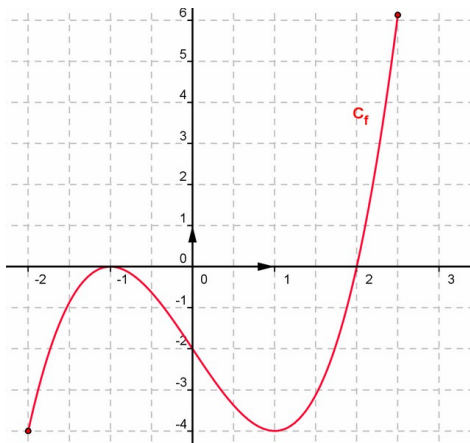
Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

**Définition:**

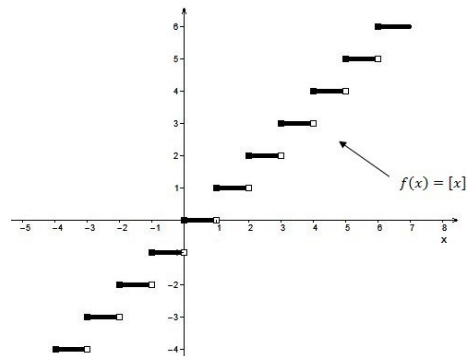
$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

On dira que  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  lorsqu'elle est continue en tout point de  $I$ .

Graphiquement, cela signifie simplement que l'on trace la courbe de  $f$  sans lever le crayon, qu'il n'y a aucun saut ou rupture dans la courbe.



Courbe d'une fonction continue



La fonction partie entière n'est pas continue

**Propriété :**

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .  
Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**Démonstration :**

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$$

Or  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} x - a = 0$

donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) = 0$  par produit et ainsi  $\lim_{x \rightarrow a} f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) = f(a)$

finalement:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  et  $f$  est continue en  $a$

Attention, la réciproque est fautive  $f(x)=\sqrt{x}$  est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

(la valeur absolue est un autre contre-exemple)

### Propriété :

Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$  .

La fonction exponentielle est continue  $\mathbb{R}$  .

La fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$  .

La fonction racine carrée est continue sur  $\mathbb{R}^+$  .

### Propriété :

Les fonctions construites par opérations ou composition de fonctions continues sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple :  $f(x)=x+5x^3-\frac{(x-2)^2}{e^{-x}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

## II) T V I

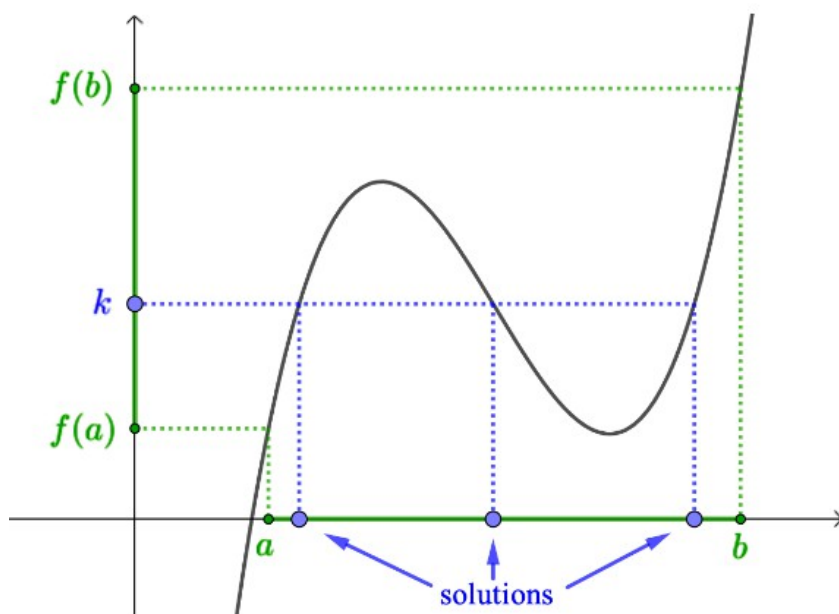
### Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  ,  
il existe un réel  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c)=k$  .

Cela signifie que si une fonction continue passe de  $f(a)$  et  $f(b)$  elle est obligée de passer (au moins une fois) par toutes les valeurs intermédiaires entre  $f(a)$  et  $f(b)$  .

Graphiquement, la courbe de  $f$  coupera obligatoirement la droite horizontale  $y=k$  pour passer de  $f(a)$  à  $f(b)$  .



## A quoi sert-il ?

### Propriété : existence de racine

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a,b]$  et changeant de signe, alors  $f$  admet une racine.

### Remarque :

Le TVI est un théorème d'existence, il affirme qu'il existe une solution mais ne nous dit pas combien il y en a et surtout il ne nous donne pas les solutions.

Pour les trouver, on utilise un algorithme : la dichotomie.

### Exemple de dichotomie :

On considère l'équation  $x^3 = 2x - 2$

1) En déterminant les limites de la fonction  $f(x) = x^3 - 2x + 2$ , pourquoi est-on sûr que cette équation admet une solution ?

2) Cette équation admet une solution dans l'intervalle  $[-2;0]$ , déterminer une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de cette solution.

$a$ tel que $f(a) < 0$	$b$ tel que $f(b) > 0$

## III) Fonctions strictement monotone

**Définition :**  $f$  strictement croissante sur  $I \Leftrightarrow \forall x < y \in I, f(x) < f(y)$

$f$  strictement décroissante sur  $I \Leftrightarrow \forall x < y \in I, f(x) > f(y)$

$f$  est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

## Propriété :

Si  $f$  est une fonction strictement monotone et continue sur un intervalle  $[a,b]$ , alors, pour tout réel  $k$ , l'équation  $f(x)=k$  admet **une unique** solution dans l'intervalle  $[a,b]$ .

*Démonstration :*

*On considère le cas strictement croissante.*

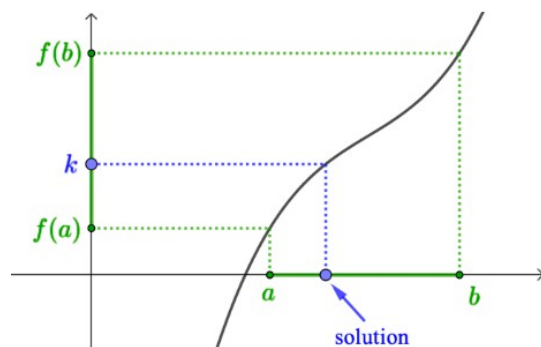
*D'après le TVI, il existe un réel  $c$  tel que  $f(c)=k$ , montrons qu'il est unique.*

*Soit un réel  $x$  de  $[a,b]$  différent de  $c$  :*

*si  $x < c$  alors  $f(x) < f(c)$  car  $f$  est strictement croissante et  $x$  ne peut pas être solution de  $f(x)=k$*

*si  $x > c$  alors  $f(x) > f(c)$  car  $f$  est strictement croissante et  $x$  ne peut pas être solution de  $f(x)=k$*

*Il n'existe pas d'autre solution dans  $[a,b]$ , le réel " $c$ " est unique.*



*Cela se démontre de même dans le cas strictement décroissante.*

## Tableaux de variations

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Un tableau de variation constitue une preuve de l'existence et de l'unicité d'équations du type  $f(x)=k$

**Exemple :**

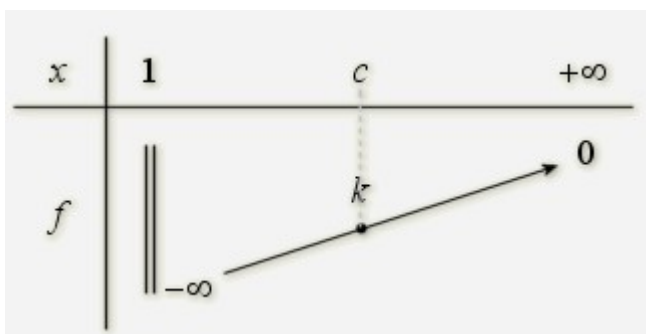
L'équation  $f(x)=4.9$  admet une unique solution comprise entre 2 et 6.

$x$	-3	-1	2	6
$f$	1	4	-2	5

Diagramme de variation montrant des flèches obliques indiquant la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

**Remarque :**

Les exemples précédents peuvent être étendus à d'autres intervalles que ceux du type  $[a,b]$ .



#### IV) Application de la continuité aux suites

On considère une fonction  $f$  et une suite  $(u_n)$

**Lemme :**

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ et } f \text{ continue alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$$

**Démonstration :**

*C'est un simple changement de variable, on pose  $X = u_n$ .*

*On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X = l$  et  $\lim_{X \rightarrow l} f(X) = f(l)$  (par définition de la continuité)*

**Théorème du point fixe :**

Soit une suite définie par récurrence :  $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  où  $f$  est une fonction continue.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  alors  $l$  est solution de l'équation  $f(x) = x$

**Démonstration :**

*Nous avons  $u_{n+1} = f(u_n)$ , prenons la limite de chaque membre.*

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$  d'après le lemme précédent.

*Finalement,  $f(l) = l$*

**Application :**

$\begin{cases} u_0 = 1.5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  où  $f$  est la fonction définie pour tout réel par  $f(x) = (x-1)^2 + 1$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 < u_n < 2$
- 2) Montrer que la suite est décroissante.
- 3) En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

1 et 2) Par récurrence

3) La suite est convergente et  $f$  est continue donc sa limite est solution de  $f(x) = x$ .

1 et 2 sont les deux seules solutions de cette équation, or 2 est impossible car la suite est décroissante et donc majorée par son premier terme (1.5). Sa limite est donc 1.

Démonstration du TVI :

Soit un réel  $k$  de l'intervalle  $I$ . On suppose que  $f(a) < f(b)$  (Sinon on procède de même en inversant les inégalités)

Soit  $m$  tel que  $m = \frac{a+b}{2}$ . Si  $f(m) \leq k$  on pose  $a_1 = m, b_1 = b$   
sinon on pose  $a_1 = a, b_1 = m$

Nous avons donc  $a \leq a_1 \leq m \leq b_1 \leq b$  et  $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$

On recommence et on définit  $a_2$  et  $b_2$  tels que  $a \leq a_1 \leq a_2 \leq m \leq b_2 \leq b_1 \leq b$  et  
 $f(a_1) \leq f(a_2) \leq k \leq f(b_2) \leq f(b_1)$

On construit ainsi une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$$

Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  respectivement croissante majorée et décroissante minorée, elles sont convergentes et comme  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ , elles convergent vers la même limite  $c$  et  $c \in [a, b]$ .

Montrons que  $f(c) = k$  :

Pour tout entier  $n$ , nous avons  $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$

Par passage à la limite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq k \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$

Comme  $f$  est continue,  $f(c) \leq k \leq f(c)$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c$  et on utilise le lemme sur les suites (voir III).

Et donc  $f(c) = k$