

Cours: Proportionnalité

Vous avez par le passé étudié des situations proportionnelles, ce sont des situations où l'on peut multiplier par un même nombre deux valeurs.

Par exemple : - si 2 objets coûtent 7,5€ alors 6 objets coûteront $7,5 \times 3 = 22,5$ €.

Le prix est proportionnel à la quantité.

- Un domino a une épaisseur de 6 mm donc en empilant 100 dominos j'atteindrai une hauteur de $100 \times 6\text{mm} = 600\text{mm} = 60\text{cm}$

La hauteur est proportionnelle au nombre de dominos.

Autre exemple, si à 1 an je mesurai 75 cm alors à 6 ans je mesurais $6 \times 75\text{cm} = 4,5\text{m}$ ici cela ne fonctionne pas parce que la taille n'est pas proportionnelle à l'âge.

I) Tableaux

Définition : Un tableau est proportionnel si pour passer d'une ligne à l'autre, on multiplie toujours par le même nombre.

Cela revient en dire qu'en divisant la première ligne par la deuxième, ou l'inverse, on trouve toujours le même résultat.

1	4	7	11	23	240
6	24	42	66	138	1440

$\frac{6}{1}=6$ $\frac{24}{4}=6$ $\frac{42}{7}=6$ $\frac{66}{11}=6$ $\frac{138}{23}=6$ $\frac{1440}{240}=6$

Pour passer de la 1ère à la 2ème ligne, on multiplie tout le temps par 6; c'est donc un tableau de proportionnalité.

Remarque : Pour passer de la deuxième ligne à la première, on divise par 6.

II) Comment compléter un tableau de proportionnalité?

1) En multipliant ou divisant une colonne

1	4
2,3	

Ici, il suffit de multiplier la première colonne par 4 puisque $1 \times 4 = 4$. Donc le nombre manquant est $2,3 \times 4 = 9,2$

2) En additionnant deux colonnes entre-elles ou en les soustrayant

1	4	5	40	39	79
2,3	9,2	x	92	y	z

Pour trouver x , on additionne les deux premières colonnes

$$x = 2,3 + 9,2 = 11,5$$

Pour trouver y , on soustrait la colonne n°4 et la colonne n°1

$$y = 92 - 2,3 = 89,7$$

Pour trouver z , on additionne les colonnes n°4 et n°5

$$z = 92 + 89,7 = 181,77$$

3) Règle de trois

16	25
2,3	t

On multiplie en diagonale et on divise par le troisième nombre :

$$t = \frac{25 \times 2,3}{16} \approx 3,59$$

III) Application

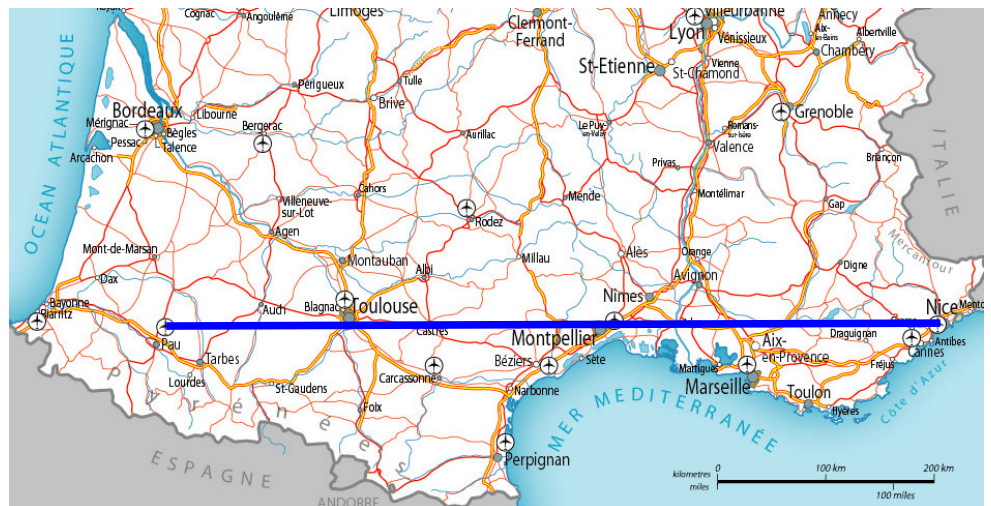
Echelle : Une carte à l'échelle 1/100 signifie que 1 cm mesuré sur la carte représente en réalité 100cm.

Exemple :

Voici une carte du sud de la France.

Je prends un avion de Nice à Pau.

Combien de kilomètres va parcourir mon avion?



L'échelle se mesure sur la carte (le segment noir en bas à droite) : 2,9 cm représente 200km. Je mesure la distance entre Nice et Pau : 10,2 cm

distance mesurée en cm	2,9	10,2
distance réelle en km	200	?

Et on complète avec une règle de trois par exemple :

$$\frac{10,2 \times 200}{2,9} \approx 703 \text{ km}$$

L'avion parcourra environ 703 km.

Pourcentage : Un pourcentage est une fraction sur 100, il représente une quantité.

Pour calculer un pourcentage, on fera un tableau de proportionnalité

Exemple :

Une voiture de 1250 kg en fin de vie est broyée pour que l'on puisse récupérer les métaux qui la compose. Si on récupère 740kg de métal, quel est le pourcentage des résidus ?

740	
1250	100

On écrira toujours 100 en bas à droite, au dessus le pourcentage (ici, c'est ce que l'on cherche); on place le plus grand des deux nombres restants à gauche de 100.

Ici, la règle de trois nous donne $\frac{740 \times 100}{1250} \approx 59,2$

59,2% est donc récupéré ce qui laisse 40,8% de résidus.

Vitesse uniforme : Une vitesse est dite uniforme entre deux points lorsqu'elle ne varie pas.
 En pratique, la vitesse n'est jamais uniforme (on s'arrête, on démarre, on ralenti, on accélère ...) mais l'on peut considérer que la vitesse moyenne est uniforme.
 Un mouvement uniforme parcourt une distance proportionnelle au temps.
 Si je roule en moyenne à 88 km/h, combien de temps mettrai-je pour parcourir 308 km ?

distance <i>en km</i>		
temps <i>en h</i>		?

Ratio : On dit que deux nombres a et b sont dans le ratio 2:3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ ce qui revient à $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

On dit que trois nombres a, b et c sont dans le ratio 2:3:7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$

Exemple 1

On peut comprendre ceci comme un partage, imaginez que je veuille partager 36€ dans un ratio 2:1 avec Lilou et Jake. Cela signifie que pour 3€, je donne 2€ à Lilou et 1€ à Jake. (*C'est un partage inégal*). Ainsi je dois partager ma somme en (2+1=)3 et donner deux parts à Lilou et une part à Jake.

$$\frac{30}{3} = 10 \text{ donc Lilou recevra } 20\text{€} (2 \times 10) \text{ et Jake recevra } 10\text{€}.$$

Exemple 2

Imaginons que je désire payer 1080 € trois personnes qui ont fait un travail. Le premier a travaillé 3h, le second 6h et le dernier a travaillé 8h. Je dois donc les payer au prorata du temps passé c'est-à-dire que celui qui a travaillé 6h doit avoir deux fois plus d'argent que celui qui a travaillé 3h.

Combien dois-je donner à chacun ?

Le ratio est 3:6:9 donc on divise la somme en 3+6+8=18 parts

Puis on donne 3 parts au 1^{er}, 6 parts au 2nd etc...

Comme $\frac{1080}{18} = 60$:

- celui qui a travaillé 3h sera payé (3 x 60=) 180€
- celui qui a travaillé 6h sera payé (6 x 60=) 360€
- celui qui a travaillé 9h sera payé (9 x 60=) 540€

On peut vérifier que :

- la somme des 3 fait 1080 : $540 + 360 + 180 = 1080$
- celui qui a travaillé 6h gagne deux fois plus que celui qui a travaillé 3h.
- celui qui a travaillé 9h gagne trois fois plus que celui qui a travaillé 3h.