Cours : Comportement d'une suite

Les suites sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$. L'image $u(n)$ est notée u_n . On peut donc étudier les variations d'une suite, la représenter graphiquement et s'intéresser à ce qu'il se passe lorsque *n* devient très grand.

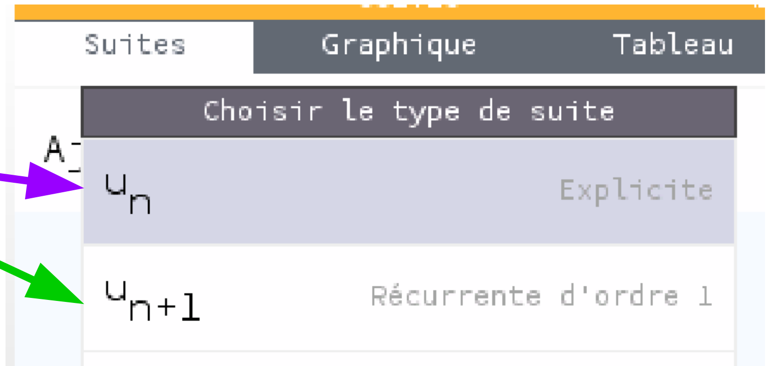
I) Conjecturer

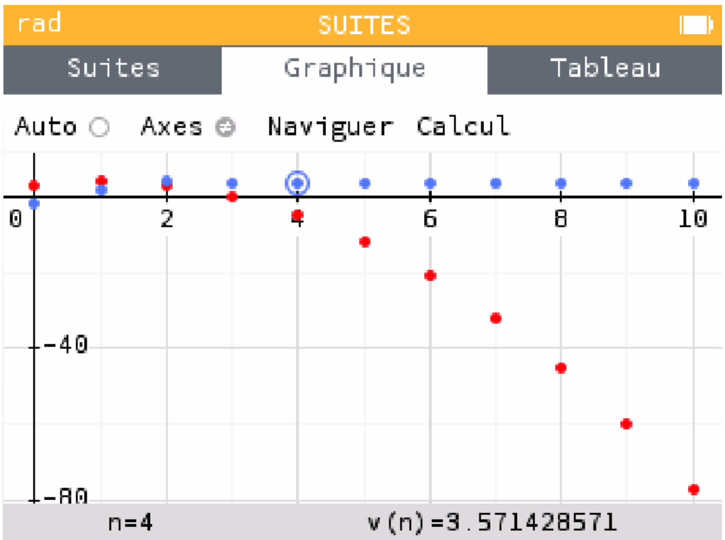
Définition : Dans un repère orthonormé, la représentation graphique d'une suite est l'ensemble des points (n, u_n) .

Sur numworks, choisissez le type de formule :

explicite ($u_n = 3 + 2n - n^2$)

récurrence ($v_{n+1} = 3 + \frac{2}{v_n}$ avec $v_0 = -2$)





Que peut-on conjecturer sur ces deux suites ?

II) Variations

Définition : Une fonction est croissante si pour tout x <y, on a $f(x) < f(y)$.
Une fonction est décroissante si pour tout x <y, on a $f(x) > f(y)$.

Appliquer aux suites, ces définitions deviennent :

1) Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier *n* : $u_{n+1} \geq u_n$

2) Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier *n* : $u_{n+1} \leq u_n$

Cette condition n'est pas toujours aisée à démontrer, nous utiliserons trois méthodes :

Méthode 1 : **On étudie le signe de** $u_{n+1}-u_n$

Exemple : $u_n=3n^2-3n$

Soit n un entier naturel.

$u_{n+1}-u_n=3(n+1)^2-3(n+1)-(3n^2-3n)=3n^2+6n+3-3n-3-3n^2+3n=6n\geq 0$

Donc $u_{n+1}-u_n\geq 0$ c'est-à-dire $u_{n+1}\geq u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

Méthode 2 : **On montre que** $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>0$ **et on compare** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ **avec 1.**

Exemple : $u_n=\frac{2^n}{n+1}$

1 - $\forall n\in\mathbb{N}, \frac{2^n}{n+1}>0$ C'est évident, il suffit de le dire.

2 - Soit n un entier naturel.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{n+2}\times\frac{n+1}{2^n}=\frac{2(n+1)}{n+2}=\frac{n+n+2}{n+2}=\frac{n}{n+2}+\frac{n+2}{n+2}=1+\frac{n}{n+2}>1$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ et comme $u_n>0$ on a $u_{n+1}>u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

Méthode 3 : **Pour les suites dont on connaît une relation explicite *f(n)*, on étudie les variations de *f*.**

Exemple : $u_n=-n^3-6n^2-15n+7$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3-6x^2-15x+7$

On calcule la dérivée, $f'(x)=-3x^2-12x-15$

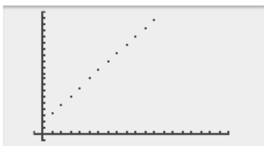
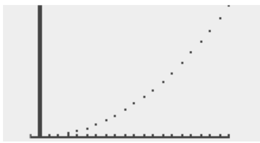
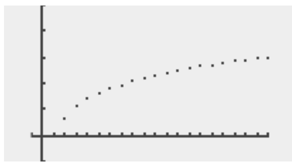
On cherche le signe de f' : $\Delta=12^2-4\times 3\times 15=144-180=-36<0$ donc f' est négative.

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$, la suite (u_n) est donc décroissante

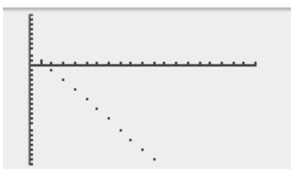
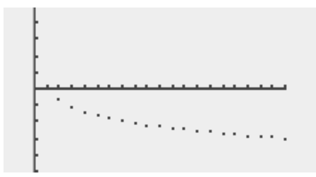
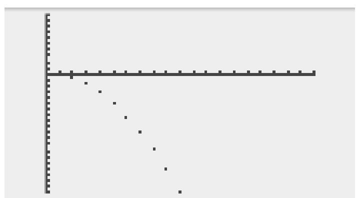
III) Limite d'une suite

Les termes d'une suite peuvent se comporter de plusieurs manières lorsque n devient de plus en plus grand (on dira lorsque n tend vers l'infini) :

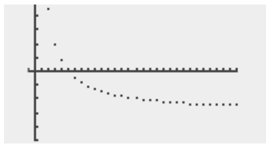
Cas n°1 : Ces trois suites montent de plus en plus haut, peu importe la valeur que vous pouvez choisir, à partir d'un moment les termes de la suite passe au-dessus. On dit que la limite de ces suites est $+\infty$ (on dit aussi que la suite tend vers $+\infty$)

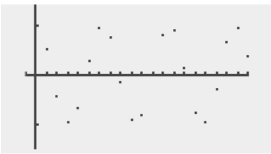
Cas n°2 : Ces trois suites descendent de plus en plus bas, peu importe la valeur que vous pouvez choisir, à partir d'un moment les termes de la suite passe en-dessous. On dit que la limite de ces suites est $-\infty$ (on dit aussi que la suite tend vers $-\infty$)

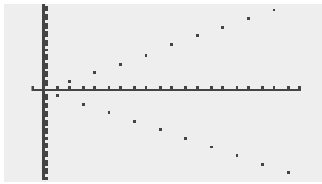




Cas n°3 : Cette suite semble stagner vers -3. On dit que la limite de cette suite est -3 (on dit aussi que la suite tend vers -3)



Cas n°4 : Ces suites font n'importe quoi, on ne dit rien du tout.





Théorème :

Si (u_n) est arithmétique de raison r, alors elle est :
- croissante si r > 0
- constante si r = 0
- décroissante si r < 0

Si (u_n) est géométrique de raison q, alors elle est :
- croissante si q > 1
- constante si q = 1
- décroissante si 0 < q <1
- ni croissante, ni décroissante si q <0

IV) Algorithme

Considérons la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=2$ et $u_{n+1}=1{,}1\,u_n+5$.
Cette suite tend vers $+\infty$ et on cherche le premier terme de cette suite dépassant la valeur 5000

En français	Votre calculatrice
On met 2 dans U On met 0 dans N Tant que U < 5000 On met le résultat de 1,1 * U + 5 dans U On met le résultat de N+1 dans N Fin tant que On affiche N	

Réponse : c'est le 49ème terme

Considérons la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=100$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.
Cette suite est décroissante et tend vers 1.
On cherche le premier terme de cette suite plus petit que 1,000 001.

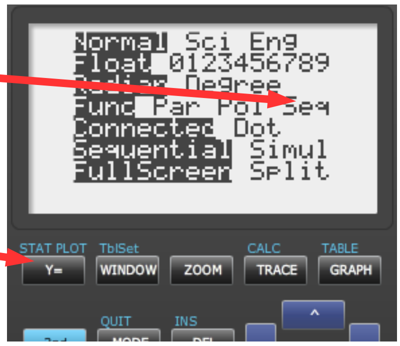
En français	Votre calculatrice
On met 100 dans U On met 0 dans N Tant que U > 1,000 001 On met le résultat de $\sqrt{U}$ dans U On met le résultat de N+1 dans N Fin tant que On affiche N	

Réponse : c'est le 23ème

Remarque : Si vous utilisez une formule explicite, la variable U disparaît (on efface les lignes 1 et 4) et on écrit le calcul dans le test de la boucle (ligne 3 à la place de U), mais avec une formule explicite on peut en général répondre par une résolution d'équation.

Sur Ti :

Commencer par régler votre calculatrice en mode suite (suite sur les modèles en français)



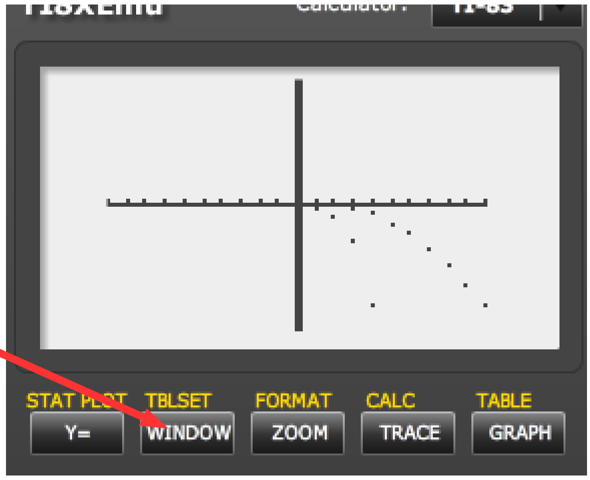
Aller ensuite sur

La première valeur est l'indice du premier terme de votre suite (en général 0)

Ici, on a écrit une formule explicite (formule avec des n), le n se mettant avec X,T,θ,n

Ici, on a écrit une suite définie par récurrence, la formule s'écrit avec le terme w_{n-1} .

Et il faut préciser le premier terme w(nMin)

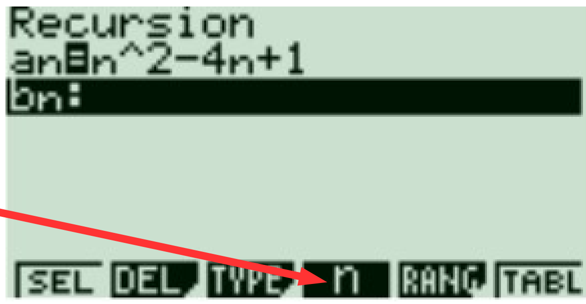


En appuyant sur la touche graph, le graphique apparaît
A vous de régler la fenêtre correctement.

Ici les deux suites sont visiblement décroissantes.

Sur Casio :

Dans le menu principal, allez sur le mode REC.



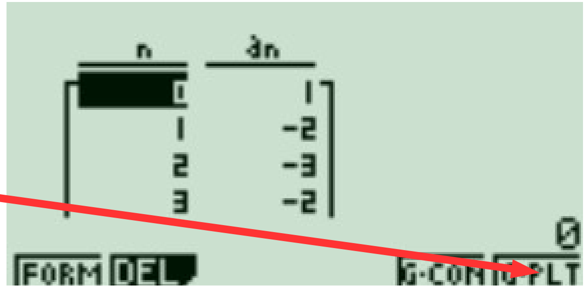
Dans Type (F3), choisir a_n pour entrer une formule explicite, la variable n se trouve ici

Puis dans RANGE, définissez le point de départ de n (en général 0) et le nombre de termes que vous voulez calculer.

Dans Type, choisir a_{n+1} , pour entrer une suite définie par récurrence.

Puis dans range, définissez le point de départ de *n* (en général 0), le nombre de termes que vous voulez calculer et la valeur de a_0 .

En allant dans TABL, un tableau de valeur s'affiche contenant les premiers termes de votre suite.



En appuyant sur G-PLT, vous accéderez au graphique correspondant.