

Chapitre 8 : Calcul littéral

Le « x » a une longue histoire. L'idée de nommer l'inconnu vient de Diophante, un mathématicien grec du III^e siècle qui l'a appelé *arithmos* (le nombre). La tradition de Diophante passa aux mathématiciens arabes du Moyen Âge, qui changèrent le mot utilisé. Au IX^e siècle, Al-Khawarizmi nommait l'inconnu *shay*, ce qui signifie « la chose ». Les espagnols, alors sous influence arabe, écrivaient ce mot en caractères latins *xay*. En effet, le son "sh" n'existait pas en espagnol, ils ont donc choisi la lettre grecque avec la consonance la plus proche χ (chi). Au XVII^e siècle, René Descartes simplifia ce terme en ne gardant que son initiale *x*. Au 13^e siècle, Jordanus de Nemore avait anticipé le calcul symbolique en utilisant de manière systématique des lettres pour désigner des valeurs données et des inconnues, voire des opérations. Mais sa manière de procéder était particulièrement compliquée. L'algèbre fit un bond prodigieux au 16^e siècle grâce aux mathématiciens français François Viète et Albert Girard qui ont divulgué le calcul littéral.

I) Manipulation

Définition

Développer un calcul signifie transformer un produit en somme. Cela revient à enlever les parenthèses. Cela permet de réduire un calcul, de le simplifier.

Factoriser un calcul signifie transformer une somme en produit. Cela revient à faire apparaître des parenthèses. Cela permet de résoudre des équations et des inéquations.

$$\begin{aligned}k \times (a + b) &= k \times a + k \times b \\(a + b) \times (c + d) &= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d\end{aligned}\quad \text{où } a, b, c, d \text{ et } k \text{ sont des réels.}$$

Identités remarquables :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

où a et b sont des réels.

Démonstration :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + ab + ab \\&= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Quotients

Comme pour les fractions, on les mettra au même dénominateur :

$$\frac{1}{2+x} - \frac{x}{x-3} = \frac{1 \times (x-3)}{(2+x)(x-3)} - \frac{x \times (2+x)}{(x-3)(2+x)} = \frac{x-3-2x-x^2}{(x-3)(2+x)} = \frac{-x^2-x-3}{(x-3)(2+x)}$$

II) Comparer des quantités

Définition

Comparer deux nombres, c'est déterminer s'ils sont égaux ou lequel est le plus grand. Lorsqu'il s'agit de nombres, vous savez le faire. Dans cette partie, on va comparer des expressions littérales (qui sont des nombres mais que l'on ne connaît pas explicitement).

On considère donc deux expressions littérales A et B.

Démontrer que A = B

Pour démontrer que A = B, vous avez deux méthodes principales :

- Transformer A pour arriver à B (ou inversement)
- Montrer que A = C puis que B = C

Exemple 1

Montrer que $\frac{3x^2+2}{x^2+1} = 3 - \frac{1}{x^2+1}$ et

$$3 - \frac{1}{x^2+1} = 3 \times \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{3x^2+3}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{3x^2+3}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$$

Donc $\boxed{\frac{3x^2+2}{x^2+1} = 3 - \frac{1}{x^2+1}}$

Exemple 2

Montrer que $(x-3)(x^2+3x-10) = (x+5)(x^2-5x+6)$

D'un côté, $(x-3)(x^2+3x-10) = x^3+3x^2-10x-3x^2-9x+30 = \underline{x^3-19x+30}$

De l'autre côté, $(x+5)(x^2-5x+6) = x^3-5x^2+6x+5x^2-25x+30 = \underline{x^3-19x+30}$

Donc $\boxed{(x-3)(x^2+3x-10) = (x+5)(x^2-5x+6)}$

Démontrer que A < B

Critères de comparaison :

différence : $A < B \Leftrightarrow A - B < 0$

quotient : Si A et B sont strictement positifs alors $A < B \Leftrightarrow \frac{A}{B} < 1$

Exemple 1

Soit un réel $t \in [0; 1]$, on considère $A = t^2$ et $B = t^3$. Montrer que $A \geq B$

$$A - B = t^2 - t^3 = t^2(1-t) \text{ or } t^2 \geq 0 \text{ et } t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1-t$$

$$\text{donc } A - B \geq 0 \text{ et finalement } A \geq B \text{ c'est-à-dire } \forall t \in [0; 1], t^2 \geq t^3$$

Exemple 2

Soit un réel x tel que $x > 1$, on considère $A = \frac{x}{x-1}$ et $B = \frac{x+1}{x}$. Comparer A et B.

On remarque que $B \neq 0$ car $x \neq -1$

$$\frac{A}{B} = \frac{x}{x-1} \times \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{comme } x^2 > x^2-1 \text{ on a } \frac{x^2}{x^2-1} > 1$$

Donc $\frac{A}{B} > 1$ et finalement $A > B$

III) Equations

Définition

Une équation est une égalité dans laquelle intervient une inconnue (en général notée x , mais ce n'est pas obligatoire)

Résoudre une équation c'est trouver l'ensemble des solutions, les valeurs qui vérifient l'égalité.

Deux équations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Pour résoudre une équation, il suffit d'isoler l'inconnue. Pour ce faire, on suivra toujours les mêmes étapes :

- 1/ On commence par réduire chaque membre de l'équation
on enlève les parenthèses et les $\times$
- 2/ On passe les termes avec des inconnues à gauche et les termes sans inconnues à droite
- 3/ On réduit
- 4/ On divise par le nombre placé devant l'inconnue.

Application :

Résoudre l'équation suivante : $2(x+1) = 3(x-5) + 2x$

1/ On réduit chaque membre

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 3x - 15 + 2x \\ 2x + 2 &= 5x - 15 \end{aligned}$$

2/ On change de côté

$$2x - 5x = -15 - 2$$

On change également les signes des termes qui changent de côté.

3/ On réduit

$$-3x = -17$$

4/ On divise par -3

$$x = \frac{-17}{-3}$$

Si on peut donner le résultat sous une forme décimale simple, on calcule sinon on laisse le résultat sous forme fractionnaire (en simplifiant)

La solution est $x = \frac{17}{3}$

Remarque :

Les = sont tous alignés l'un en dessous de l'autre pour faciliter la lecture.

On peut très bien mettre l'inconnue à droite :

$$x = 7 \text{ est la même chose que } 7 = x$$

Il est en général plus simple d'enlever les fractions en multipliant par le dénominateur toute l'équation, ainsi par exemple :

$$\frac{2}{7}x + 5 = \frac{5x + 5}{7} \quad \text{si on multiplie les deux membres de l'équation par 7}$$

$$2x + 35 = 5x + 5$$

et

$$-3x = -30$$

$$x = 10$$

Equations produit

Pour résoudre une équation du second degré (avec des x^2) ou de degré supérieur, on peut factoriser et utiliser la règle du produit nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Application :

Résoudre $x(x-24)-(x-24)(49-6x)=0$

$$\begin{aligned} x(x-24)-(x-24)(49-6x)=0 &\Leftrightarrow (x-24)(x-49+6x)=0 \Leftrightarrow (x-24)(7x-49)=0 \\ &\Leftrightarrow x-24=0 \text{ ou } 7x-49=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x=24 \text{ ou } x=7$$

Equations quotient

Pour résoudre une équation avec une inconnue au dénominateur d'un quotient, on cherche les valeurs interdites (ce sont les valeurs qui annulent le dénominateur) puis on multiplie par le dénominateur (pour faire disparaître le quotient), on résout l'équation et on retire de l'ensemble des solutions les valeurs interdites.

Application :

Résoudre $\frac{2x-3}{x+1}=7$

On commence par chercher les valeurs interdites : $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Pour tout $x \neq -1$, $2x-3=7(x+1)$

$$\Leftrightarrow 2x-3=7x+7$$

$$\Leftrightarrow -5x=10$$

$$\Leftrightarrow x=-2$$

Comme -2 n'est pas une valeur interdite, c'est la seule solution de cette équation : $S=\{-2\}$